

On the theory of self-adjoint extensions of positive definite operators

M. Sh. Birman (Leningrad)

Math. Sb. **28** (1956), 431-450

Translation from Russian and adaptation by

M. Khotyakov (LMU Munich) and A. Michelangeli (LMU Munich and SISSA Trieste).

Partially supported by a 2014-2015 INdAM grant and the 2014-2017 FIR-MIUR grant, code RBFR13WAET.

The theory of extensions of symmetric operators on a Hilbert space has found nowadays numerous applications in analysis (the momentum problem) and in the boundary problem for differential equations. The theory of extensions for operators with finite deficiency indices has been worked out particularly in detail. Such operators always emerge in the study of one-dimensional boundary problems. Concerning boundary problems for partial differential equations (of elliptic type), they lead, generally speaking, to operators with infinite deficiency indices. It is also important that ordinarily these operators turn out to be semi-bounded. In connection with this, the theory of extensions of semi-bounded symmetric operators with infinite deficiency indices provides a great interest for applications. The main results in this fields are due to K. Friedrichs and M. G. Kreĭn.

In his article [1] K. Friedrichs proposed a special method for extending a semi-bounded symmetric operator to a self-adjoint one, which is based on the closure of the associated quadratic form. The resulting extension has the same lower bound as the original operator.

The question of self-adjoint extensions of semi-bounded symmetric operators has been most thoroughly investigated in the article of M. G. Kreĭn [2]. With the help of a fractional linear transformation, M. G. Kreĭn reduced the problem to constructing extensions of a bounded symmetric operator defined on a non-dense set. This way M. G. Kreĭn found out that among all semi-bounded self-adjoint extensions of a semi-bounded symmetric operator there is one (“rigid”) extension which has a number of remarkable extremal properties. M. G. Kreĭn has also showed that the extension of the operator by Friedrichs method always leads to the rigid extension.

Among other works on the extension theory, the article of M. I. Višik [3] is of great interest. Having released the assumption of symmetry of the initial operator, M. I. Višik considers extensions which have certain properties of resolvability, such as extensions with bounded inverse operator and the like. In the case when the initial operator is symmetric, special consideration is given to its self-adjoint extensions. M. I. Višik applies his results to the study of general boundary problems for second order elliptic differential equations.

Let us quickly have a look at the research method used by M. I. Višik restricting to the case of symmetric operators. M. I. Višik associates every operator extension with some other operator B acting in the subspace of the zeros of the adjoint of the original operator. One can characterise the properties of resolvability of the extension in terms of the associated operator B . On the other hand, in the applications to boundary problems M. I. Višik finds that the operator B is immediately determined by the boundary conditions of the problems provided that these conditions are expressed in some “canonical” form. Through this, the connection between the properties of the extensions of the original differential operators and the form of the boundary conditions is established.

There arises the question of characterising further properties of the extensions, and not only properties of resolvability, in terms of the operator B (i.e., in terms of boundary conditions). Particularly interesting for applications in connection with the theory of M. G. Kreĭn, is the characterisation of self-adjoint extensions of a positive definite symmetric operator.¹

¹The problem of the extension of semi-bounded operator can be trivially reduced to the problem of extensions of an operator with positive lower bound (positive definite).

In the present article various questions on this subject are considered. A characterisation of semi-bounded self-adjoint extensions of the initial operator are given in terms of the operator B , and also the quadratic forms associated with these extensions are described. Besides that, one theorem on the negative part of the spectrum of semi-bounded extensions is proved and symmetric positive-definite extensions of the initial operator are described.

A brief communication on the results of this article has been published in Doklady Acad. Nauk SSSR [7]. Applications of the extension theory to multi-dimensional boundary problems had been considered in the author's notes [4], [5], [6].

1 Some results from the theory of operator extensions

For the purpose of the future presentation we shall list in this Section several results obtained by M. G. Kreĭn and M. I. Višik.

Let us first of all consider some auxiliary notions introduced by K. Friedrichs and M. G. Kreĭn. Let T be a semi-bounded symmetric operator with dense domain of definition $\mathcal{D}(T)$ in the Hilbert space \mathcal{H} .² With each such operator we will associate a linear set $\mathcal{D}[T]$, which represents the closure of $\mathcal{D}(T)$ in the sense of the T -convergence. This is defined in the following way: $g_n \xrightarrow{T} g$ if $g_n \in \mathcal{D}(T)$, $g_n \rightarrow g$, and $(Tg_n - Tg_m, g_n - g_m) \rightarrow 0$ for $n, m \rightarrow \infty$. With this closure the functional (Tf, g) naturally extends to $\mathcal{D}[T]$. Following M. G. Kreĭn, we shall denote this extension by $T[f, g]$. One can consider the set $\mathcal{D}[T]$ as a complete Hilbert space, if one introduces the scalar product by means of the formula

$$(f, g)_T = T[f, g] - \beta(f, g)$$

with arbitrary $\beta < m(T)$. If the operator T is positive and self-adjoint then, as M. G. Kreĭn has shown,

$$\mathcal{D}[T] = \mathcal{D}(T^{1/2}) \quad \text{and} \quad T[f, g] = (T^{1/2}f, T^{1/2}g).$$

We remark that for the operator $T_\alpha = T + \alpha\mathbb{1}$ one has

$$\mathcal{D}[T_\alpha] = \mathcal{D}[T], \quad T_\alpha[f, g] = T[f, g] + \alpha(f, g).$$

Let S be a closed symmetric operator with positive lower bound (positive definite)

$$(Sf, f) \geq \gamma(f, f) \quad (\gamma = m(S) > 0)$$

for all $f \in \mathcal{D}(S)$. The operator S allows for an infinite set of self-adjoint extensions, at least one of which has the same lower bound γ as the initial operator. In particular, the extension which one gets according to K. Friedrichs [1] has this property. Following M. G. Kreĭn we shall denote this extension by S_μ and call it the **rigid extension of the operator** S . The method of K. Friedrichs consists of constructing a set $\mathcal{D}[S]$ and a functional $S[f, g]$ on it. It turns out that $\mathcal{D}[S]$ is the domain of definition of the square root of some self-adjoint extension S_μ of the operator S :

$$\mathcal{D}(S) \subset \mathcal{D}(S_\mu) \subset \mathcal{D}[S] = \mathcal{D}[S_\mu] = \mathcal{D}(S_\mu^{1/2}).$$

Besides that, for all $f, g \in \mathcal{D}[S]$

$$S[f, g] = S_\mu[f, g] = (S_\mu^{1/2}f, S_\mu^{1/2}g).$$

M. G. Kreĭn showed that S_μ is the unique semi-bounded self-adjoint extension of the operator S whose domain of definition lies in $\mathcal{D}[S]$.

Denote by S^* the adjoint operator of S and by U the set of solutions to the equation $S^*u = 0$. It is easy to see³ that $U = \mathcal{H} \ominus R(S)$. M. G. Kreĭn has shown that for every semi-bounded self-adjoint extension \tilde{S} the set $\mathcal{D}[\tilde{S}]$ decomposes into the direct sum

$$\mathcal{D}[\tilde{S}] = \mathcal{D}[S] \dot{+} \mathcal{D}[\tilde{S}] \cap U,$$

²Henceforth by $\mathcal{D}(A)$ we will denote the domain of definition of the operator A . By $R(A)$ we will denote the set of values of A , and by $m(A)$ the lower bound of A in case A is semi-bounded.

³The dimension of the subspace U is equal to the deficiency number of S . Henceforth we shall never assume the subspace U to be finite-dimensional.

whence $\tilde{S}[f, g] = S[f, g]$, if $f, g \in \mathcal{D}[S]$, and $\tilde{S}[f, u] = \tilde{S}[u, f] = 0$, if $f \in \mathcal{D}[S]$ and $u \in \mathcal{D}[\tilde{S}] \cap U$.

Let us highlight another proposition of M. G. Kreĭn.

If \tilde{S}_1 and \tilde{S}_2 are semi-bounded self-adjoint extensions of the operator S , then for the inequality

$$(\tilde{S}_1 + \alpha \mathbb{1})^{-1} \leq (\tilde{S}_2 + \alpha \mathbb{1})^{-1}$$

to hold for at least one $\alpha > -m(\tilde{S}_k)$ ($k = 1, 2$) (and hence for all such α) the following conditions are necessary and sufficient:

$$\mathcal{D}[\tilde{S}_1] \cap U \subset \mathcal{D}[\tilde{S}_2] \cap U \quad \text{and} \quad \tilde{S}_2[u, u] \leq \tilde{S}_1[u, u] \quad (u \in \mathcal{D}[\tilde{S}_1] \cap U).$$

It follows in particular that

$$S_\mu^{-1} \leq \tilde{S}^{-1}, \text{ if } m(\tilde{S}) > 0.$$

Below we will use also other results of M. G. Kreĭn. Their formulations will be stated along the discussion.

To conclude we will consider the following important theorem of M. I. Višik.

Theorem 1. *The domain of definition of the operator S^* , the adjoint of S , decomposes into the direct sum*

$$\mathcal{D}(S^*) = \mathcal{D}(S) \dot{+} S_\mu^{-1}U \dot{+} U. \quad (1)$$

In order for an operator \tilde{S} to be a self-adjoint extension of the operator S it is necessary and sufficient that the operator \tilde{S} is defined as a restriction of S^ on the direct sum*

$$\mathcal{D}(\tilde{S}) = \mathcal{D}(S) \dot{+} (S_\mu^{-1} + B)\tilde{U}_1 \dot{+} U_0; \quad (2)$$

where U_1 is some subspace of U , B is a self-adjoint operator in U_1 , $\tilde{U}_1 = \mathcal{D}(B)$ is a set dense in U_1 , and $U_0 = U \ominus U_1$.

We remark that the statements of the theorem remain true if one replaces the rigid extension S_μ in the decompositions (1) and (2) with an arbitrary fixed self-adjoint extension which has an everywhere defined bounded inverse in \mathcal{H} .

For the convenience of the future discussion we will provide here a relatively easy proof of Theorem 1, somewhat different from the proof of M. I. Višik.

First we check that the decomposition (1) is true. It is clear that

$$\mathcal{D}(S) + S_\mu^{-1}U + U \subseteq \mathcal{D}(S^*),$$

since $\mathcal{D}(S) \subset \mathcal{D}(S^*)$, $U \subset \mathcal{D}(S^*)$, and $S_\mu^{-1}U \subset \mathcal{D}(S_\mu) \subset \mathcal{D}(S^*)$. Let us prove the opposite inclusion. Let $g \in \mathcal{D}(S^*)$, $S^*g = h$, and $f = S_\mu^{-1}h$. From $S^*(g - f) = S^*g - S_\mu f = h - h = 0$ it follows $u = g - f \in U$. Since $\mathcal{H} = R(S) \oplus U$, then $h = h_0 + \bar{u}$, where $h_0 \in R(S)$ and $\bar{u} \in U$. It follows that $f = S_\mu^{-1}(h_0 + \bar{u}) = S^{-1}h_0 + S_\mu^{-1}\bar{u}$ and $g = f_0 + S_\mu^{-1}\bar{u} + u$, where $f_0 = S^{-1}h_0 \in \mathcal{D}(S)$.

So

$$\mathcal{D}(S^*) \subseteq \mathcal{D}(S) \dot{+} S_\mu^{-1}U \dot{+} U.$$

It remains to check that the sum (1) is direct. Let $g = f_0 + S_\mu^{-1}\bar{u} + u = 0$. Then $S^*g = Sf_0 + \bar{u} = 0$ and, since $Sf_0 \perp \bar{u}$, $Sf_0 = \bar{u} = 0$. It follows that $f_0 = S^{-1}(Sf_0) = 0$ and $S_\mu^{-1}\bar{u} = 0$. Since $u = g - f_0 - S_\mu^{-1}\bar{u} = 0$, it is proved that the sum (1) is direct.

Let us proceed to the proof of the decomposition (2).

Necessity. Let \tilde{S} be a self-adjoint extension of S and U_0 be the subspace of the solutions to $\tilde{S}u_0 = 0$. Clearly, $U_0 \subseteq U$. We introduce this notation: $U_1 = U \ominus U_0$, $\mathcal{H}_+ = \mathcal{H} \ominus U_0 = R(S) \oplus U_1$. Since the set $R(\tilde{S})$ is dense in \mathcal{H}_+ , $R(\tilde{S})$ can be represented as

$$R(\tilde{S}) = R(S) \dot{+} \tilde{U}_1, \quad (3)$$

where \tilde{U}_1 is some dense set in U_1 . The operator \tilde{S} , if considered only in \mathcal{H}_+ , has on $R(\tilde{S})$ the inverse operator \tilde{S}^{-1} . It is known that the operator \tilde{S}^{-1} is self-adjoint in \mathcal{H}_+ and $\tilde{S}^{-1}R(\tilde{S}) = P_+\mathcal{D}(\tilde{S})$; here P_+ is the projection operator onto \mathcal{H}_+ . We will extend \tilde{S}^{-1} to the whole \mathcal{H} maintaining the self-adjointness by considering it to be 0 on U_0 . Applying \tilde{S}^{-1} to the decomposition (3) we find that

$$P_+\mathcal{D}(\tilde{S}) = P_+\mathcal{D}(S) + \tilde{S}^{-1}\tilde{U}_1. \quad (4)$$

Since $\mathcal{D}(\tilde{S}) = P_+\mathcal{D}(\tilde{S}) + U_0$ and $P_+\mathcal{D}(S) + U_0 = \mathcal{D}(S) + U_0$, (4) can be written as

$$\mathcal{D}(\tilde{S}) = \mathcal{D}(S) + \tilde{S}^{-1}\tilde{U}_1 + U_0. \quad (5)$$

Let us consider the operator $B = \tilde{S}^{-1} - P_+S_\mu^{-1}P_+$. This is a self-adjoint operator with domain of definition $\mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(\tilde{S}^{-1}) = R(\tilde{S}) + U_0$ dense in \mathcal{H} . It is clear that $BU_0 = 0$. We shall show that $BR(S) = 0$. Indeed, let $h_0 \in R(S)$ and $f_0 = S^{-1}h_0$. Then,

$$Bh_0 = \tilde{S}^{-1}h_0 - P_+S_\mu^{-1}P_+h_0 = P_+f_0 - P_+S_\mu^{-1}h_0 = P_+f_0 - P_+f_0 = 0.$$

We see that the subspaces U_0 and $R(S)$ are invariant for the operator B , that is why B has to be a self-adjoint operator in U_1 if it is considered only on the domain \tilde{U}_1 . By means of the operator B let us re-write the decomposition (5) as

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\tilde{S}) &= \mathcal{D}(S) + [P_+S_\mu^{-1}P_+ + (\tilde{S}^{-1} - P_+S_\mu^{-1}P_+)]\tilde{U}_1 + U_0 \\ &= \mathcal{D}(S) + (P_+S_\mu^{-1} + B)\tilde{U}_1 + U_0 \\ &= \mathcal{D}(S) + P_+(S_\mu^{-1} + B)\tilde{U}_1 + U_0. \end{aligned}$$

Since

$$P_+(S_\mu^{-1} + B)\tilde{U}_1 + U_0 = (S_\mu^{-1} + B)\tilde{U}_1 + U_0,$$

we can finally decompose $\mathcal{D}(\tilde{S})$ as follows:

$$\mathcal{D}(\tilde{S}) = \mathcal{D}(S) + (S_\mu^{-1} + B)\tilde{U}_1 + U_0.$$

The latter sum is direct, since it is a part of the direct sum (1). Necessity is proved.

Sufficiency. Let U_0 be some subspace of U and B be some self-adjoint operator in $U_1 = U \ominus U_0$, whose domain of definition we denote by \tilde{U}_1 . Let us form the direct sum

$$\mathcal{D}(\tilde{S}) = \mathcal{D}(S) + (S_\mu^{-1} + B)\tilde{U}_1 + U_0$$

and define on it the operator \tilde{S} as the restriction of the operator S^* . Clearly, \tilde{S} is an extension of the operator S . Let us show that this extension is self-adjoint. Let for all $g \in \mathcal{D}(\tilde{S})$ be

$$(\tilde{S}g, t) = (g, t^*). \quad (6)$$

One has to show that $t \in \mathcal{D}(\tilde{S})$ and $\tilde{S}t = t^*$. Clearly $t \in \mathcal{D}(S^*)$ and $t^* = S^*t$, and thus, according to the decomposition (1), $t = \varphi_0 + S_\mu^{-1}\bar{v} + v$, $t^* = S\varphi_0 + \bar{v}$, where $\varphi_0 \in \mathcal{D}(S)$, $v, \bar{v} \in U$. Let us consider (6) with g equal to some arbitrary element $u_0 \in U_0$. We get

$$(t^*, u_0) = (t, \tilde{S}u_0) = 0,$$

i.e., $t^* \perp U_0$. Since $t^* = S\varphi_0 + \bar{v}$ and $S\varphi_0 \perp U$, it follows that $\bar{v} \in U_1$. Let us represent v in the form $v = v_0 + v_1$, where $v_0 \in U_0$, $v_1 \in U_1$. Let us consider (6) with g equal to some arbitrary element of the form

$$g = f_0 + S_\mu^{-1}u_1 + Bu_1, \quad \text{where } f_0 \in \mathcal{D}(S), u_1 \in \tilde{U}_1.$$

For short denote $\varphi = \varphi_0 + S_\mu^{-1}\bar{v}$, $f = f_0 + S_\mu^{-1}u_1$, $\varphi, f \in \mathcal{D}(S_\mu)$. Since $\tilde{S}g = S^*g = S^*f + S^*Bu_1 = S_\mu f$ and $t^* = S^*t = S_\mu\varphi$, we get from (6) the equality

$$(S_\mu f, \varphi + v_1 + v_0) = (f + Bu_1, S_\mu\varphi). \quad (7)$$

Since $(S_\mu f, \varphi) = (f, S_\mu\varphi)$, $S_\mu f = Sf_0 + u_1$, and $S_\mu\varphi = S\varphi_0 + \bar{v}$, it follows from (7) that

$$(Sf_0 + u_1, v_1 + v_0) = (Bu_1, S\varphi_0 + \bar{v}).$$

Finally, noting that $Sf_0 \perp v_1 + v_0$, $u_1 \perp v_0$, and $Bu_1 \perp S\varphi_0$, we find the relation

$$(Bu_1, \bar{v}) = (u_1, v_1). \quad (8)$$

Since u_1 is an arbitrary element from $\mathcal{D}(B) = \tilde{U}_1$, $\bar{v}, v_1 \in U_1$, and the operator B is self-adjoint in U_1 , it follows from (8) that $\bar{v} \in \mathcal{D}(B)$ and $v_1 = B\bar{v}$, and thus

$$t = \varphi_0 + (S_\mu^{-1} + B)\bar{v} + v_0.$$

The last equality shows that $t \in \mathcal{D}(\tilde{S})$. This way, the operator \tilde{S} is self-adjoint and the theorem is proved.

Remark. The formula

$$B = \tilde{S}^{-1} - P_+ S_\mu^{-1} P_+ \quad (9)$$

obtained along the proof allows to reconstruct the operator B uniquely from the extension \tilde{S} . It follows also from this formula that the boundedness of the operator B is necessary and sufficient for the boundedness of the inverse operator \tilde{S}^{-1} considered on $R(\tilde{S})$. If in addition U_0 consists only of the zero element, then \tilde{S} has a bounded inverse everywhere on \mathcal{H} .

2 On the semi-bounded extensions of a positive definite operator

The aim of the current Section consists of characterising the semi-bounded extensions of an operator S in terms of the corresponding operators B . Below, along with B , we will often need to consider the inverse operator B^{-1} . Obviously this is a self-adjoint operator in $\overline{R(B)}$ with domain of definition $R(B)$. However, we will always consider B^{-1} to be defined on a broader set

$$\mathcal{D}(B^{-1}) = R(B) \dot{+} U_0,$$

by setting $B^{-1}U_0 = 0$.

Lemma 1. *If \tilde{S} is a semi-bounded self-adjoint extension of the operator S and B is the corresponding operator in U_1 (in the sense of Theorem 1), then*

$$\mathcal{D}(B^{-1}) \subset \mathcal{D}[\tilde{S}]$$

and, for all $v_1, v_2 \in \mathcal{D}(B^{-1})$,

$$\tilde{S}[v_1, v_2] = (B^{-1}v_1, v_2). \quad (10)$$

Proof. Let $v \in \mathcal{D}(B^{-1})$. By definition of the set $\mathcal{D}(B^{-1})$, $v = Bu + v_0$, where $u \in \tilde{U}_1$ and $v_0 \in U_0$. According to Theorem 1, the element $g = S_\mu^{-1}u + Bu + v_0$ is contained in $\mathcal{D}(\tilde{S})$. Since $f = S_\mu^{-1}u \in \mathcal{D}(S_\mu) \subset \mathcal{D}[S] \subset \mathcal{D}[\tilde{S}]$ and $g \in \mathcal{D}(\tilde{S}) \subset \mathcal{D}[\tilde{S}]$, the element $v = g - f \in \mathcal{D}[\tilde{S}]$. Furthermore, since $\tilde{S}g = u$, then

$$\tilde{S}[g, g] = (\tilde{S}g, g) = (u, f + v) = (S_\mu f, f) + (u, v) = S[f, f] + (B^{-1}v, v).$$

On the other hand, according to the results of M. G. Kreĭn quoted above, $\tilde{S}[f, v] = 0$ and thus

$$\tilde{S}[g, g] = S[f, f] + \tilde{S}[v, v].$$

Comparing this equality with the former one, we find that

$$\tilde{S}[v, v] = (B^{-1}v, v).$$

The concluding step to the bilinear relation (10) is performed in the ordinary way. The Lemma is proved.

Let us make one more remark needed in the following. Let A be a positive definite self-adjoint operator. Then for all $h \in \mathcal{H}$

$$\sup_{f \in \mathcal{D}(A)} \frac{|(f, h)|^2}{(Af, f)} = (A^{-1}h, h).$$

Indeed, setting $g = A^{1/2}f$, we find that

$$\sup_{f \in \mathcal{D}(A)} \frac{|(f, h)|^2}{(Af, f)} = \sup_{g \in \mathcal{H}} \frac{|(A^{-1/2}g, h)|^2}{\|g\|^2} = \sup_{\|g\|=1} |(g, A^{-1/2}h)|^2.$$

According to Bunyakowsky's inequality, the upper bound of the last expression is attained by $g = A^{-1/2}h/\|A^{-1/2}h\|$ and thus

$$\sup_{f \in \mathcal{D}(A)} \frac{|(f, h)|^2}{(Af, f)} = (A^{-1}h, h).$$

In particular, if $A = S_\mu - \alpha \mathbb{1}$ ($\alpha < m(S) = \gamma$) and $R_\alpha = (S_\mu - \alpha \mathbb{1})^{-1}$, then for every $h \in \mathcal{H}$

$$\sup_{f \in \mathcal{D}(S_\mu)} \frac{|(f, h)|^2}{(S_\mu f, f) - \alpha(f, f)} = (R_\alpha h, h). \quad (11)$$

Theorem 2. *In order for the self-adjoint extension \tilde{S} of the operator S to satisfy the condition of semi-boundedness*

$$(\tilde{S}g, g) \geq \alpha(g, g) \quad (\alpha < \gamma) \quad (12)$$

for all $g \in \mathcal{D}(\tilde{S})$, it is necessary and sufficient that for all $v \in \mathcal{D}(B^{-1})$ the following inequality holds

$$(B^{-1}v, v) \geq \alpha(v, v) + \alpha^2(R_\alpha v, v). \quad (13)$$

Proof. Condition (12) is equivalent to

$$\tilde{S}[g, g] \geq \alpha(g, g), \quad g \in \mathcal{D}[\tilde{S}], \quad (14)$$

which arises from (12) by taking the closure in the sense of \tilde{S} -convergence. In particular, let $g = f + v$, where $f \in \mathcal{D}(S_\mu)$ and $v \in \mathcal{D}(B^{-1})$. According to Lemma 1, $g \in \mathcal{D}[\tilde{S}]$ and

$$\tilde{S}[g, g] = (S_\mu f, f) + (B^{-1}v, v).$$

Let us write condition (14) in the form

$$(S_\mu f, f) + (B^{-1}v, v) \geq \alpha(f, f) + \alpha(f, v) + \alpha(v, f) + \alpha(v, v).$$

Replacing here f with ξf and v with ηv , we get the inequality

$$[(S_\mu f, f) - \alpha(f, f)]\xi\bar{\xi} - \alpha(f, v)\xi\bar{\eta} - \alpha(v, f)\bar{\xi}\eta + [(B^{-1}v, v) - \alpha(v, v)]\eta\bar{\eta} \geq 0. \quad (15)$$

Since $\alpha < \gamma = m(S)$ and, thus, $(S_\mu f, f) - \alpha(f, f) \geq 0$, then for all $f \in \mathcal{D}(S_\mu)$ and $v \in \mathcal{D}(B^{-1})$ the validity of the inequality

$$\alpha^2|(f, v)|^2 \leq [(B^{-1}v, v) - \alpha(v, v)][(S_\mu f, f) - \alpha(f, f)] \quad (16)$$

is a necessary and sufficient condition for the positivity of the quadratic form in the left hand side of (15). Let us show that not only is this condition necessary but also sufficient for the validity of the inequality (12). Indeed if $g \in \mathcal{D}(\tilde{S})$ then, according to Theorem 1,

$$g = f_0 + S_\mu^{-1}u_1 + Bu_1 + u_0,$$

where $f_0 \in \mathcal{D}(S)$, $u_1 \in \tilde{U}_1$, and $u_0 \in U_0$. Since $f = f_0 + S_\mu^{-1}u_1 \in \mathcal{D}(S_\mu)$ and $v = Bu_1 + u_0 \in \mathcal{D}(B^{-1})$, then (15) follows from (16). Setting $\xi = \eta = 1$ in inequality (15), noting that $g = f + v$, and proceeding in the opposite direction along the computations above, we find that condition (14), which coincides with condition (12) for $g \in \mathcal{D}(\tilde{S})$, holds true. For the proof of the theorem it remains to write (16) in the form

$$(B^{-1}v, v) - \alpha(v, v) \geq \frac{\alpha^2|(f, v)|^2}{(S_\mu f, f) - \alpha(f, f)}$$

and to compare it with (11).

Corollaries:

1. *If the operator \tilde{S} is semi-bounded and $m(\tilde{S}) \geq \alpha$, the operator B^{-1} is also semi-bounded and $m(B^{-1}) \geq \alpha$. This statement follows directly from formula (13).*

2. In order for the operator \tilde{S} to be positive, it is necessary and sufficient that the corresponding operator B^{-1} is positive.

For the proof of this statement it suffices to set $\alpha = 0$ in (12) and (13).

3. In order for the operator \tilde{S} to be positive definite, it is necessary and sufficient that the corresponding operator B^{-1} is positive definite.

Indeed, if $m(B^{-1}) > 0$, then $m(\tilde{S}) \geq 0$. The operator B^{-1} has a bounded inverse, thus U_0 consists only of the zero element and the operator B is bounded. According to the Remark on Theorem 1, \tilde{S} has then a bounded inverse everywhere in \mathcal{H} . This is why the equality $m(\tilde{S}) = 0$ is impossible and the operator \tilde{S} is positive definite. Conversely, if $m(\tilde{S}) > 0$ then, according to (13), $m(B^{-1}) \geq m(\tilde{S}) > 0$.

4. If $m(B^{-1}) \geq c$ and $c > -\gamma$, then the corresponding operator \tilde{S} is semi-bounded and

$$m(\tilde{S}) \geq \alpha = \frac{\gamma c}{\gamma + c}.$$

It is easy to see that $\alpha < \gamma$. Condition (13) is fulfilled since the stronger condition

$$(B^{-1}v, v) - \alpha(v, v) \geq \frac{\alpha^2}{\gamma - \alpha}(v, v), \quad v \in \mathcal{D}(B^{-1}),$$

representing another form of writing the inequality $(B^{-1}v, v) \geq c(v, v)$, holds true.

5. In order for the self-adjoint extension \tilde{S} of the operator S to have the lower bound $m(\tilde{S}) = \gamma$, it is necessary and sufficient that condition (13) holds true for all $\alpha < \gamma$.

The proof of this statement is obvious.

Remark. M. G. Kreĭn stated conditions for which the rigid extension S_μ is the unique self-adjoint extension of the operator S with the lower bound $\gamma = m(S)$ (see Theorems 8 and 9 of the work [2]). Corollary 5 gives us an alternative way to get these conditions.

As we already noted, for semi-bounded extensions \tilde{S} of the operator S there exists the decomposition of M. G. Kreĭn:

$$\mathcal{D}[\tilde{S}] = \mathcal{D}[S] \dot{+} \mathcal{D}[\tilde{S}] \cap U. \quad (17)$$

It is interesting to describe the set $\mathcal{D}[\tilde{S}] \cap U$ in terms of the operator B . Before the proof of the corresponding theorem we anticipate a lemma.

Lemma 2. If \tilde{S} is a semi-bounded extension of S and $\beta < m(\tilde{S})$, then there exists a positive number $\eta < 1$ such that

$$\beta^2 |(f, v)|^2 \leq \eta^2 [(S_\mu f, f) - \beta(f, f)] [(B^{-1}v, v) - \beta(v, v)] \quad (18)$$

for all $f \in D(S_\mu)$ and $v \in \mathcal{D}(B^{-1})$.

Proof. According to (11), to prove inequality (18) it suffices to establish the validity of the relation

$$\beta^2 (R_\beta v, v) \leq \eta^2 [(B^{-1}v, v) - \beta(v, v)],$$

which we re-write in the form

$$(B^{-1}v, v) \geq \frac{\beta^2 (R_\beta v, v)}{\eta^2} + \beta(v, v). \quad (19)$$

Let the number α be such that $\beta < \alpha < m(\tilde{S})$. According to Theorem 2,

$$(B^{-1}v, v) \geq \alpha^2 (R_\alpha v, v) + \alpha(v, v). \quad (20)$$

Let us show that the number η can be chosen in such a way that for all $v \in \mathcal{D}(B^{-1})$ the inequality

$$\alpha^2 (R_\alpha v, v) + \alpha(v, v) \geq \frac{\beta^2 (R_\beta v, v)}{\eta^2} + \beta(v, v) \quad (21)$$

holds true. We denote by \mathcal{E}_λ the spectral measure of the operator S_μ , and re-write (21) in the form

$$\int_\gamma^\infty \left(\frac{\alpha^2}{\lambda - \alpha} + \alpha - \frac{\beta^2}{(\lambda - \beta)\eta^2} - \beta \right) d(\mathcal{E}_\lambda v, v) \geq 0. \quad (22)$$

Assume first that $\beta < 0$. Then we can also assume $\alpha < 0$. Since

$$\frac{\alpha^2}{\lambda - \alpha} + \alpha - \frac{\beta^2}{(\lambda - \beta)\eta^2} - \beta = \frac{(\alpha - \beta)\lambda^2}{(\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)} - \frac{(\eta^{-2} - 1)\beta^2}{\lambda - \beta} \geq \frac{(\alpha - \beta)\gamma^2}{(\gamma - \beta)(\gamma - \alpha)} - \frac{(\eta^{-2} - 1)\beta^2}{\gamma - \beta},$$

then, for a sufficiently small value of $\theta = \eta^{-2} - 1$, inequality (21) indeed holds true. If $\beta \geq 0$, then $\alpha > 0$; in this case the validity of (21) follows from the relation

$$\frac{(\alpha - \beta)\lambda^2}{(\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)} - \frac{\theta\beta^2}{\lambda - \beta} \geq (\alpha - \beta) - \frac{\theta\beta^2}{\gamma - \beta},$$

if θ is chosen to be sufficiently small. Comparing inequalities (21), (20), and (19) we convince ourselves that the Lemma is true.

Moreover, let us remark that since

$$\begin{aligned} (S_\mu f, f) - \beta(f, f) &= \tilde{S}[f, f] - \beta(f, f) = (f, f)_{\tilde{S}}, \\ (B^{-1}v, v) - \beta(v, v) &= \tilde{S}[v, v] - \beta(v, v) = (v, v)_{\tilde{S}}, \end{aligned}$$

and

$$-\beta(f, v) = \tilde{S}[f, v] - \beta(f, v) = (f, v)_{\tilde{S}},$$

we can write inequality (18) in the form

$$|(f, v)_{\tilde{S}}|^2 \leq \eta^2 (f, f)_{\tilde{S}} (v, v)_{\tilde{S}}. \quad (23)$$

Inequality (23) shows that the “angle” between the manifolds $\mathcal{D}(S_\mu)$ and $\mathcal{D}(B^{-1})$ in the Hilbert space $\mathcal{D}[\tilde{S}]$ is different from zero.

Theorem 3. *For every semi-bounded extension of the operator S*

$$\mathcal{D}[\tilde{S}] \cap U = \mathcal{D}[B^{-1}] \quad (24)$$

and thus, according to (17),

$$\mathcal{D}[\tilde{S}] = \mathcal{D}[S] \dot{+} \mathcal{D}[B^{-1}]. \quad (25)$$

Proof. Let $\beta < m(\tilde{S})$. According to Corollary 1 of Theorem 2, the operator B^{-1} is semi-bounded and $m(B^{-1}) > \beta$. The set $\mathcal{D}[B^{-1}]$ represents the closure of $\mathcal{D}(B^{-1})$ in the metric defined by the scalar product

$$(v_1, v_2)_{B^{-1}} = (B^{-1}v_1, v_2) - \beta(v_1, v_2), \quad v_1, v_2 \in \mathcal{D}(B^{-1}).$$

According to Lemma 1, $\mathcal{D}(B^{-1}) \subset \mathcal{D}[\tilde{S}]$ and

$$(v_1, v_2)_{B^{-1}} = (B^{-1}v_1, v_2) - \beta(v_1, v_2) = \tilde{S}[v_1, v_2] - \beta(v_1, v_2) = (v_1, v_2)_{\tilde{S}},$$

and therefore the closure in the norm $(v, v)_{B^{-1}}$ does not lead out of $\mathcal{D}[\tilde{S}]$. On the other hand, since

$$(v, v)_{B^{-1}} = (B^{-1}v, v) - \beta(v, v) \geq (m(B^{-1}) - \beta)(v, v),$$

the closure of $\mathcal{D}(B^{-1})$ in the norm $(v, v)_{B^{-1}}$ does not lead out of U . This way,

$$\mathcal{D}[B^{-1}] \subset \mathcal{D}[\tilde{S}] \cap U.$$

Now let us establish the opposite inclusion. Let $u \in \mathcal{D}[\tilde{S}] \cap U$. By the definition of the set $\mathcal{D}[\tilde{S}]$, there exists a sequence $\{g_k\} \subset \mathcal{D}(\tilde{S})$ such that

$$\|g_k - u\|_{\tilde{S}} \rightarrow 0 \quad \text{as } k \rightarrow \infty. \quad (26)$$

Representing g_k in the form $g_k = f_k + v_k$, $f_k \in \mathcal{D}(S_\mu)$, $v_k \in \mathcal{D}(B^{-1})$, according to (23) we get

$$\begin{aligned} \|g_k - g_m\|_{\tilde{S}}^2 &= \|f_k - f_m\|_{\tilde{S}}^2 + 2\Re(f_k - f_m, v_k - v_m)_{\tilde{S}} + \|v_k - v_m\|_{\tilde{S}}^2 \\ &\geq \|f_k - f_m\|_{\tilde{S}}^2 - 2\eta \|f_k - f_m\|_{\tilde{S}} \|v_k - v_m\|_{\tilde{S}} + \|v_k - v_m\|_{\tilde{S}}^2 \\ &\geq (1 - \eta) [\|f_k - f_m\|_{\tilde{S}}^2 + \|v_k - v_m\|_{\tilde{S}}^2]. \end{aligned}$$

It now follows from (26) that

$$\|f_k - f_m\|_{\tilde{S}} \rightarrow 0 \quad \text{as } k, m \rightarrow \infty, \quad \|v_k - v_m\|_{\tilde{S}} \rightarrow 0 \quad \text{as } k, m \rightarrow \infty.$$

Since $\|v_k - v_m\|_{\tilde{S}} = \|v_k - v_m\|_{B^{-1}}$, the sequence $\{v_k\}$ converges to some element $v \in \mathcal{D}[B^{-1}]$. Exactly in the same way the sequence $\{f_k\}$ converges to some element $f \in \mathcal{D}[S]$. Taking the limit in the equality $g_k = f_k + v_k$ we find that $u = f + v$. Since $f = u - v \in U$, then necessarily $f = 0$ and $u = v \in \mathcal{D}[B^{-1}]$. The theorem is proved.

Corollaries:

1. If the operator \tilde{S} is positive, then

$$\mathcal{D}[\tilde{S}] = \mathcal{D}[S] \dot{+} R(B^{1/2}) \dot{+} U_0.$$

Indeed, if $\tilde{S} \geq 0$, then $B^{-1} \geq 0$ and hence

$$\mathcal{D}[B^{-1}] = \mathcal{D}(B^{-1/2}) = R(B^{1/2}) \dot{+} U_0.$$

2. For $v \in \mathcal{D}[\tilde{S}] \cap U$

$$\tilde{S}[v, v] = B^{-1}[v, v].$$

Indeed, $v \in \mathcal{D}[B^{-1}]$ and therefore there exists a sequence $\{v_n\} \subset \mathcal{D}(B^{-1})$ such that $v_n \xrightarrow{B^{-1}} v$ or, equivalently, $v_n \xrightarrow{\tilde{S}} v$. It remains to note that

$$B^{-1}[v, v] = \lim_{n \rightarrow \infty} (B^{-1}v_n, v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{S}[v_n, v_n] = \tilde{S}[v, v].$$

3 On the spectrum of self-adjoint extensions of a positive definite operator

Based on the knowledge of the type of the spectrum of the operator B it is sometimes possible to get information on the spectrum of the corresponding extension \tilde{S} . Now, in the proof of Theorem 1 we established (formula (9)) that the operator $\tilde{S}^{-1} - P_+ S_\mu^{-1} P_+$ coincides with the operator B if the latter is extended by zero to $R(S) \oplus U_0$. From this it follows that in case S_μ^{-1} is absolutely continuous, then the absolute continuity of \tilde{S}^{-1} is equivalent to that of B .

M. G. Kreĭn proved theorems⁴ that allow one to describe the number of negative eigenvalues of the self-adjoint extensions of a positive definite operator with finite deficiency index. Using Theorems 1 and 3 the result of M. G. Kreĭn can be formulated as follows:

The number of negative eigenvalues (considering their multiplicity) of the operator \tilde{S} is exactly equal to the number of the negative eigenvalues of the operator B^{-1} .

The extension of M. G. Kreĭn's result to the case of an operator S with an infinite deficiency index is the following

Theorem 4. *In order for the negative part of the spectrum of the self-adjoint extension \tilde{S} of the operator S to consist of a bounded from below set of eigenvalues of finite rank and not to have accumulation points distinct from zero, it is necessary and sufficient that the negative part of the spectrum of the operator B^{-1} has the same property. Moreover, if one of the operators \tilde{S} , B^{-1} has a finite number of negative eigenvalues, then the other one has exactly the same number of negative eigenvalues.*

⁴see Theorems 19 and 20 of work [2]

Proof. The proof of the theorem is based on the following obvious remark:

If G is a finite-dimensional subspace of \mathcal{H} and W is a linear set of dimension higher than the one of G , then W contains an element orthogonal to G .

Let us start with the proof of the necessity of the first statement. It follows from the condition of the theorem that \tilde{S} is a semi-bounded operator. Let E_λ be the resolution of the identity for \tilde{S} , $m(\tilde{S}) = \alpha < 0$, $m(B^{-1}) = \delta$ (according to Corollary 1 of Theorem 2, $\delta \geq \alpha$), F_t the decomposition of the identity for B^{-1} , and V be the closure in \mathcal{H} of the set $\mathcal{D}(B^{-1})$. We note that for $g \in \mathcal{D}[\tilde{S}]$

$$\tilde{S}[g, g] = \int_\alpha^\infty \lambda d(E_\lambda g, g). \quad (27)$$

Indeed, setting $T = \tilde{S} - \beta \mathbb{1}$ ($\beta < \alpha$), we see that $T > 0$ and thus, for $g \in \mathcal{D}[T]$,

$$T[g, g] = \|T^{1/2}g\|^2 = \int_\alpha^\infty (\lambda - \beta) d(E_\lambda g, g) = \int_\alpha^\infty \lambda d(E_\lambda g, g) - \beta(g, g).$$

From this, since $\tilde{S}[g, g] = T[g, g] + \beta(g, g)$, we get formula (27). Applying it to $v \in \mathcal{D}(B^{-1})$ and noting that

$$\tilde{S}[v, v] = (B^{-1}v, v) = \int_\delta^\infty t d(F_t v, v), \quad (28)$$

we get, comparing (27) and (28), the inequality

$$\int_\delta^\infty t d(F_t v, v) \geq \int_\alpha^0 \lambda d(E_\lambda v, v). \quad (29)$$

Assume that the statement of the theorem does not hold for B^{-1} . Then one can find an interval $\Delta = [\delta, -\varepsilon]$ ($\varepsilon > 0$) such that $F_\Delta V$ is infinite-dimensional.⁵ Let $\Delta_1 = [\alpha, -\frac{\varepsilon}{2}]$. According to the condition of the theorem, the subspace $E_{\Delta_1} \mathcal{H}$ is finite-dimensional and thus one can find a non-zero element $\bar{v} \in F_\Delta V$, orthogonal to $E_{\Delta_1} \mathcal{H}$. Since $\bar{v} \in \mathcal{D}(B^{-1})$, applying inequality (29) to \bar{v} we get that

$$\int_\delta^{-\varepsilon} t d(F_t \bar{v}, \bar{v}) \geq \int_{-\varepsilon/2}^0 \lambda d(E_\lambda \bar{v}, \bar{v}).$$

But then

$$\begin{aligned} -\varepsilon(\bar{v}, \bar{v}) &\geq \int_\delta^{-\varepsilon} t d(F_t \bar{v}, \bar{v}) \geq \int_{-\varepsilon/2}^0 \lambda d(E_\lambda \bar{v}, \bar{v}) \\ &\geq -\frac{\varepsilon}{2} \int_{-\varepsilon/2}^0 d(E_\lambda \bar{v}, \bar{v}) \geq -\frac{\varepsilon}{2}(\bar{v}, \bar{v}), \end{aligned}$$

which is impossible. The necessity of the first statement is proved.

Let us turn to the proof of sufficiency. We note preliminarily that if \tilde{S} is a self-adjoint extension of S , if

$$\begin{aligned} g_k &\in \mathcal{D}(\tilde{S}) \cap E_{(-\infty, -\varepsilon]} \mathcal{H} \quad (\varepsilon > 0), \quad g_k = f_k + v_k, \\ f_k &\in \mathcal{D}(S_\mu), \quad v_k \in \mathcal{D}(B^{-1}), \end{aligned}$$

and if the g_h 's are linearly independent, then the corresponding elements v_k 's are also linearly independent. Indeed, if for some values of the constant c_k one has $\sum_{k=1}^n c_k v_k = 0$, then

$$g = \sum_{k=1}^n c_k g_k = \sum_{k=1}^n c_k f_k \in \mathcal{D}(S_\mu) \quad \text{and} \quad (\tilde{S}g, g) = (S^*g, g) = (S_\mu g, g) \geq \gamma(g, g),$$

which is impossible, since $g \in E_{(-\infty, -\varepsilon]} \mathcal{H}$ and $g \neq 0$.

Assume that the statement of the theorem does not hold for \tilde{S} . Then one can find $\varepsilon > 0$ such that the subspace $E_{(-\infty, -\varepsilon]} \mathcal{H}$ is infinite-dimensional. Owing to that, its dense linear subset $\mathcal{D}(\tilde{S}) \cap E_{(-\infty, -\varepsilon]} \mathcal{H}$

⁵As always, here we denote $F_\Delta = F_\delta - F_{-\varepsilon}$

is infinite-dimensional. Applying the decomposition $g = f + v$, $f \in \mathcal{D}(S_\mu)$, $v \in \mathcal{D}(B^{-1})$, to all elements $g \in \mathcal{D}(\tilde{S}) \cap E_{(-\infty, -\varepsilon]} \mathcal{H}$, let us consider the linear set of corresponding elements v which we denote by V_ε . Owing to the noted linear independence of the elements v , one can claim that the set V_ε is also infinite-dimensional. Let $\delta = m(B^{-1})$, $\Delta_h = [\delta, -h]$, and the number h be chosen such that it fulfills the conditions: $0 < h < \gamma$, $-h > \delta$, $\frac{\gamma h}{\gamma - h} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. It follows from the condition of the theorem that the subspace $F_{\Delta_h} V$ is finite-dimensional. Thus, the set V_ε contains an element v' which is orthogonal to the subspace $F_{\Delta_h} V$. Let v' correspond to the element g' from $\mathcal{D}(\tilde{S}) \cap E_{(-\infty, -\varepsilon]} \mathcal{H}$. Owing to the noted linear independence, such an element can be chosen uniquely. Let us set $f' = g' - v'$ and show that

$$(\tilde{S}g', g') \geq -\frac{\varepsilon}{2}(g', g'). \quad (30)$$

One can do this in the same way as Theorem 2 and its Corollary 4 are proved. Let us write (30) in the form

$$[(S_\mu f', f') + \frac{\varepsilon}{2}(f', f')] + \frac{\varepsilon}{2}(f', v') + \frac{\varepsilon}{2}(v', f') + [(B^{-1}v', v') + \frac{\varepsilon}{2}(v', v')] \geq 0.$$

A sufficient condition for the positivity of this expression is the validity of inequality

$$\frac{\varepsilon^2}{4} |(f', v')|^2 \leq [(S_\mu f', f') + \frac{\varepsilon}{2}(f', f')] [(B^{-1}v', v') + \frac{\varepsilon}{2}(v', v')],$$

which, according to (11), is true when the condition

$$\frac{\varepsilon^2}{4} (R_{-\varepsilon/2} v', v') \leq (B^{-1}v', v') + \frac{\varepsilon}{2}(v', v') \quad (31)$$

is true. In turn, the validity of inequality (31) is guaranteed by the validity of the stronger condition

$$\frac{\varepsilon^2}{4} \left(\gamma + \frac{\varepsilon}{2} \right)^{-1} (v', v') \leq (B^{-1}v', v') + \frac{\varepsilon}{2}(v', v'),$$

which one can write in the following form:

$$(B^{-1}v', v') \geq -\frac{\gamma\varepsilon}{2\gamma + \varepsilon}(v', v'). \quad (32)$$

Finally, the validity of relation (32) follows from the fact that, according to the choice of h ,

$$h \leq \frac{\gamma\varepsilon}{2\gamma + \varepsilon}$$

and thus

$$(B^{-1}v', v') = \int_{-h}^{\infty} t d(F_t v', v') \geq -h(v', v') \geq -\frac{\gamma\varepsilon}{2\gamma + \varepsilon}(v', v').$$

This way, relation (30) should be valid, which is however impossible, since $g' \in E_{(-\infty, -\varepsilon]} \mathcal{H}$ and

$$(\tilde{S}g', g') \leq -\varepsilon(g', g').$$

The obtained contradiction proves the validity of the first statement of the theorem.

We turn to the proof of the second part of the theorem. Assume \tilde{S} has p negative eigenvalues. The discrete character of the negative part of the spectrum of the operator B^{-1} can be established with the first statement. If B^{-1} has more than p negative eigenvalues then for some $\varepsilon > 0$ there exists an element $\bar{v} \in F_{[\delta, -\varepsilon]} V$, orthogonal to $E_{[\alpha, 0]} \mathcal{H}$. Since $\bar{v} \in \mathcal{D}(B^{-1})$, then applying (29) we find that

$$\int_{\delta}^{-\varepsilon} t d(F_t \bar{v}, \bar{v}) \geq 0.$$

The latter is however impossible. This way the number q of negative eigenvalues of the operator B^{-1} does not exceed p . On the other hand, if q is finite then $p \leq q$. Indeed, if the contrary holds, for some $\varepsilon > 0$ the dimension of the subspace $E_{[\alpha, -\varepsilon]} \mathcal{H}$ is larger than q and thus the dimension of V_ε is also larger than q . So V_ε has an element v' orthogonal to the subspace $F_{[\delta, 0]} V$. But then, for the corresponding element g' we obtain the inequality

$$(\tilde{S}g', g') = (S_\mu f', f') + (B^{-1}v', v') \geq (B^{-1}v', v') \geq \int_{\delta}^0 t d(F_t v', v') = 0,$$

which is impossible, since $g' \in E_{[\alpha, -\varepsilon]} \mathcal{H}$. Comparing these results we see that $p = q$. The theorem is proved.

Remark. We note that under the conditions of the theorem the sequential negative eigenvalues of the operators \tilde{S} and B^{-1} satisfy the relations

$$\lambda_j(\tilde{S}) \leq \lambda_j(B^{-1}) \quad (j = 1, 2, \dots).$$

Indeed, since the discrete character of the negative part of the spectrum is established, one can find the numbers $\lambda_j(\tilde{S})$ as the sequential minima of the quadratic form

$$\tilde{S}[g, g] \quad (\|g\| = 1)$$

on the set $\mathcal{D}[\tilde{S}]$. According to Corollary 2 of Theorem 3, on the set $\mathcal{D}[B^{-1}]$ this form coincides with the quadratic form

$$B^{-1}[v, v] \quad (\|v\| = 1),$$

whose sequential minima are given by the numbers $\lambda_j(B^{-1})$. It now remains to refer to the known mini-maximal property of eigenvalues.

4 On the positive definite symmetric extensions of the operator S

Below theorems are given which are supplements to Theorem 1. Theorem 5 gives a characterisation of the symmetric positive definite extensions S' of the initial operator S . Theorem 6 gives a general characterisation of the self-adjoint extensions of the operator S' . Theorem 7 is devoted to the characterisation of the rigid extension S'_μ of the operator S' .

Theorem 5. *In order for the operator S' to be a closed symmetric positive definite extension of the operator S , it is necessary and sufficient that S' is defined as a restriction of S^* on the direct sum*

$$\mathcal{D}(S') = \mathcal{D}(S) \dot{+} (S_\mu^{-1} + B')U'; \quad (33)$$

here U' is some subspace of U , B' is a symmetric operator which maps U' into U and satisfies the condition

$$(B'u', B'u') \leq M (B'u', u'), \quad M > 0, \quad u' \in U'. \quad (34)$$

Proof. *Necessity.* We introduce the notation:

$$\bar{U} = \mathcal{H} \ominus R(S') \quad \text{and} \quad U' = U \ominus \bar{U}.$$

It is obvious that $R(S') = R(S) \oplus U'$. Let us consider the rigid extension S'_μ of the operator S' . According to Theorem 1, there exists an operator B , bounded and self-adjoint in U , such that

$$\mathcal{D}(S'_\mu) = \mathcal{D}(S) \dot{+} (S_\mu^{-1} + B)U. \quad (35)$$

Obviously, $R(S'_\mu) = \mathcal{H}$. We denote with B' the restriction of the operator B defined on U' and check that

$$\mathcal{D}(S') = \mathcal{D}(S) \dot{+} (S_\mu^{-1} + B')U'.$$

Indeed, if $g = f_0 + (S_\mu^{-1} + B')u'$, $f_0 \in \mathcal{D}(S)$, $u' \in U'$, then $S'_\mu g = S f_0 + u' \in R(S')$, and thus $g \in \mathcal{D}(S')$. Conversely, if $g \in \mathcal{D}(S')$, then, according to (35), $g = f_0 + (S_\mu^{-1} + B)u$, $f_0 \in \mathcal{D}(S)$, $u \in U$, $S'g = S'_\mu g = S f_0 + u$, and necessarily $u \in U'$, for otherwise $S'g \notin R(S')$. It remains to ensure that condition (34) holds. Let F_t be the spectral measure of the operator B , M be its upper bound, and $u \in U$. Since the operator B is positive, then

$$(Bu, Bu) = \int_0^M t^2 d(F_t u, u) \leq M \int_0^M t d(F_t u, u) = M(Bu, u).$$

These inequalities hold in particular on U' . Necessity is proved.

Sufficiency. We note first of all that the operator B' defined on U' can be extended to a self-adjoint operator in U , which also satisfies condition (34).⁶ Indeed, let us consider the symmetric operator $C' = B' - \frac{M}{2}\mathbb{1}$ on U' :

$$(C'u', C'u') = (B'u', B'u') - M(B'u', u') + \frac{M^2}{4}(u', u') \leq \frac{M^2}{4}(u', u').$$

According to Theorem 2 of M. G. Kreĭn's work [2], there exists at least one self-adjoint extension \tilde{C} of the operator C' on the whole U , which satisfies the condition $\|\tilde{C}u\| \leq \frac{M}{2}\|u\|$, $u \in U$. The operator $\tilde{B} = \tilde{C} + \frac{M}{2}\mathbb{1}$ is obviously a self-adjoint extension of the operator C' and in addition

$$\begin{aligned} (\tilde{B}u, \tilde{B}u) &= (\tilde{C}u, \tilde{C}u) + M(\tilde{C}u, u) + \frac{M^2}{4}(u, u) \\ &\leq \frac{M^2}{2}(u, u) + M(\tilde{C}u, u) = M(\tilde{B}u, u). \end{aligned}$$

With the help of the operator \tilde{B} we construct a positive definite operator \tilde{S} with domain of definition

$$\mathcal{D}(\tilde{S}) = \mathcal{D}(S) \dot{+} (S_\mu^{-1} + \tilde{B})U.$$

The operator \tilde{S} , when defined on the direct sum (33), is obviously a restriction of the operator \tilde{S} and thus has to be positive definite as well. The closedness of S' follows from the existence of a bounded inverse operator $(S')^{-1}$ on the closed set $R(S') = R(S) \oplus U'$. The theorem is proved.

Remarks.

1. If B' is a positive bounded self-adjoint operator in U' , then obviously condition (34) holds.
2. The operator B' is defined by the formula

$$B'u = (S')^{-1}u - S_\mu^{-1}u, \quad u \in U'. \quad (36)$$

Indeed, according to (9), $B = (S'_\mu)^{-1} - S_\mu^{-1}$, and this formula coincides with (36) on U' .

We now consider the issue of self-adjoint extensions of the operator S' . Let U_0 be a subspace in \bar{U} and $U_1 = U' \oplus (\bar{U} \ominus U_0)$. We denote $\mathcal{H} \ominus U_0$ by \mathcal{H}_+ : $\mathcal{H}_+ = \mathcal{H} \ominus U_0$, and the projection operator onto \mathcal{H}_+ by P_+ .

Theorem 6. *In order for the operator \tilde{S} to be a self-adjoint extension of the operator S' , it is necessary and sufficient that \tilde{S} is defined as a restriction of S^* on the direct sum*

$$\mathcal{D}(\tilde{S}) = \mathcal{D}(S) \dot{+} (S_\mu^{-1} + \tilde{B})\tilde{U}_1 \dot{+} U_0; \quad (37)$$

here $\tilde{U}_1 = \mathcal{D}(\tilde{B})$ is a set dense in U_1 , \tilde{B} is a self-adjoint extension on U_1 of a symmetric operator P_+B' on U' .

Proof. Necessity. If the operator \tilde{S} is a self-adjoint extension of S' then obviously $\tilde{S} \supset S$, $\tilde{S} \subset S^*$ and, according to Theorem 1,

$$\mathcal{D}(\tilde{S}) = \mathcal{D}(S) \dot{+} (S_\mu^{-1} + B)\tilde{U}_1 \dot{+} U_0.$$

The meaning of the notation is the same as in Theorem 1. The corresponding subspaces U_0 and U_1 satisfy the conditions of the theorem to prove. Indeed,

$$U_0 = \mathcal{H} \ominus \overline{R(S)} \subset \mathcal{H} \ominus R(S') = \bar{U}$$

and

$$U_1 = U \ominus U_0 = (U' \oplus \bar{U}) \ominus U_0 = U' \oplus (\bar{U} \ominus U_0).$$

It remains to show that the operator B is the extension of the operator P_+B' . To this aim, we note that the operators \tilde{S}^{-1} and $P_+(S')^{-1}$ coincide on U' and according to (9) and (36)

$$B = \tilde{S}^{-1} - P_+S_\mu^{-1}P_+ = P_+(S')^{-1} - P_+\tilde{S}_\mu^{-1} = P_+((S')^{-1} - S_\mu^{-1}) = P_+B'.$$

⁶For a self-adjoint operator, the validity of condition (34) follows, as we have seen, from its positivity and boundedness. On the other hand, every symmetric operator satisfying (34) is positive and bounded. Indeed,

$$(B'u', u') \geq M^{-1}\|B'u'\|^2 \geq 0, \quad \|B'u'\|^2 \leq M\|B'u'\|\|u'\|, \quad \|B'u'\| \leq M\|u'\|, \quad \|B'\| \leq M.$$

Necessity is proved.

Sufficiency. Let U_0 be some subspace of \bar{U} and \tilde{B} be a self-adjoint extension of the operator P_+B' on U_1 . Then formula (37) defines some operator \tilde{S} which is a self-adjoint extension of the operator S . Let us show that $\tilde{S} \supset S'$. Let $g' \in \mathcal{D}(S')$. According to Theorem 5, $g' = f_0 + S_\mu^{-1}u' + B'u'$, $f_0 \in \mathcal{D}(S)$, $u' \in U'$. We denote $B'u' - P_+B'u'$ by u_0 . Obviously, $u_0 \in U_0$. Now let us represent g' in the form

$$g' = f_0 + S_\mu^{-1}u' + P_+B'u' + u_0 = f_0 + (S_\mu^{-1} + \tilde{B})u' + u_0.$$

Since $u' \in U' \subset U_1$, $u' \in \mathcal{D}(\tilde{B})$, and $u_0 \in U_0$, then according to (37) $g' \in \mathcal{D}(\tilde{S})$. Thus, $\tilde{S} \supset S'$ and the theorem is proved.

Let us turn to the characterisation of the rigid extension S'_μ of the operator S' . According to Theorem 6, the domain of definition $\mathcal{D}(S'_\mu)$ can be decomposed into the direct sum

$$\mathcal{D}(S'_\mu) = \mathcal{D}(S) \dot{+} (S_\mu^{-1} + \tilde{B})U,$$

where \tilde{B} is some positive bounded self-adjoint extension of the operator B' . It is easy to see that the set of positive bounded self-adjoint extensions \tilde{B} of the operator B' on U is defined by the formula

$$\tilde{B} = \bar{B} - G;$$

here \bar{B} is one of such extensions (fixed) and G is an arbitrary self-adjoint operator in U , which satisfies the conditions $(Gu, u) \leq (\bar{B}u, u)$ and $GU' = 0$. The second condition is obviously equivalent to $R(G) \subset \bar{U}$. Theorem 1 of M. G. Krein's work [2] allows one to state that among the operators G with the mentioned properties there can be found a maximal operator G_μ . We get the minimal (lower) positive bounded extension of the operator B' if we choose the operator G_μ as G . We denote this extension by B_μ . It follows from Theorem 5 of work [2] that B_μ is the unique extension of \tilde{B} for which U' is dense in U in the norm

$$\|u\|_{\tilde{B}}^2 = (\tilde{B}u, u).$$

After these remarks it is not difficult to prove the following theorem:

Theorem 7. *The domain of definition of the rigid extension S'_μ of the operator S' can be represented as the direct sum*

$$\mathcal{D}(S'_\mu) = \mathcal{D}(S) \dot{+} (S_\mu^{-1} + B_\mu)U,$$

where B_μ is the lower positive extension of the operator B' on U .

Proof. Let us temporarily denote by \bar{S} the extension of the operator S' constructed by B_μ and show that $\mathcal{D}(\bar{S}) \subset \mathcal{D}[S']$. As it was noted in Section 1, this will prove that $\bar{S} = S'_\mu$. Since

$$\mathcal{D}(\bar{S}) = \mathcal{D}(S) \dot{+} (S_\mu^{-1} + B_\mu)U$$

and

$$\mathcal{D}(S) + S_\mu^{-1}U \subset \mathcal{D}(S_\mu) \subset \mathcal{D}[S] \subset \mathcal{D}[S'],$$

it is enough to show that

$$B_\mu U = \mathcal{D}(B_\mu^{-1}) \subset \mathcal{D}[S']. \quad (38)$$

Since the extension \bar{S} is positive definite, then we can set

$$\|g\|_{\bar{S}}^2 = \bar{S}[g, g], \quad (39)$$

which introduces a norm in $\mathcal{D}[\bar{S}]$. The set $\mathcal{D}[S']$ is some subspace in $\mathcal{D}[\bar{S}]$. Then for the proof of (38) it suffices to show that each element from $B_\mu U$ can be approximated in the norm (39) by elements of $\mathcal{D}[S']$. Let $v = B_\mu u$, $u \in U$. According to the property of the lower extension, one can find a sequence $\{u'_n\} \subset U'$ such that $\|u'_n - u\|_{B_\mu}^2 \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$. But the latter means that for v one has constructed a sequence of elements $v_n = B_\mu u'_n$ belonging to the set $\mathcal{D}[\bar{S}]$, convergent in the \bar{S} -norm.

Indeed, according to (10),

$$\begin{aligned}\|u'_n - u\|_{B_\mu}^2 &= (B_\mu u - B_\mu u'_n, u - u'_n) = (B_\mu^{-1}v - B_\mu^{-1}v'_n, v - v'_n) \\ &= \overline{S}[v - v'_n, v - v'_n] \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty,\end{aligned}$$

and it remains to prove that $v'_n \in \mathcal{D}[S']$. We temporarily denote by \overline{B} the operator corresponding to the rigid extensions S'_μ . Since $v'_n = B_\mu u'_n = B' u'_n = \overline{B} u'_n$, then $v'_n \in \mathcal{D}(\overline{B}^{-1})$, and according to Lemma 1, $v'_n \in \mathcal{D}[S'_\mu] = \mathcal{D}[S']$. The theorem is proved.

Remark. If the operator B' is self-adjoint in U' then we obviously get its lower extension if we extend it by zero on \overline{U} . According to the proved theorem, the obtained extension of the operator B' allows one to construct the rigid extension S'_μ of the operator S' .

(Submitted to the editorial office on 13 November 1954.)

Bibliography

- [1] K. Friedrichs, *Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren und Anwendung auf die Spektralzerlegung von Differentialoperatoren*, Math. Ann. **109** (1934), 465-487.
- [2] M. Kreĭn, *The theory of self-adjoint extensions of semi-bounded Hermitian operators and its applications. I*, Rec. Math. [Mat. Sbornik] **20** (62) (1947), 431-495
- [3] M. I. Višik, *On general boundary problems for elliptic differential equations*, Trudy Mosk. Mat. Obshch. **1** (1952), 187-246.
- [4] M. Sh. Birman, *On the theory of general boundary problems for elliptic differential equations*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **92**, no. 2 (1953), 205-208.
- [5] M. Sh. Birman, *On minimal functionals for elliptic differential equations of second order*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **93**, no. 6 (1953), 953-956.
- [6] M. Sh. Birman, *On the spectrum of singular boundary problems for elliptic differential equations*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **97**, no. 1 (1954), 5-7.
- [7] M. Sh. Birman, *On the theory of self-adjoint extensions of positive definite operators*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **91**, no. 2 (1953), 189-191.

NOTES TO THE TRANSLATION

- (i) Throughout Birman's article, at the moment of *choosing* a subspace of the Hilbert space \mathcal{H} , it is tacitly assumed that such a subspace is *closed*. Thus, for instance, in the statement of Theorem 1 U_1 is a closed subspace of $\text{Ker } S^*$.
- (ii) Except for the preliminary remark at the beginning of Section 2, in Birman's article there is no explicit notation to distinguish among a subspace of \mathcal{H} and its closure. Thus, in several orthogonal direct sums appearing in the text, such as $\mathcal{H} = R(S) \oplus U$ and $\mathcal{H}_+ = R(S) \oplus U_1$ in the proof of Theorem 1, a summand appears which is not closed as it should be according to the usual convention for “ \oplus ”. In the above-mentioned example, U_1 , U , and \mathcal{H}_+ are closed subspaces of \mathcal{H} but $R(S)$ is not, thus one should have written $\mathcal{H} = \overline{R(S)} \oplus U$ and $\mathcal{H}_+ = \overline{R(S)} \oplus U_1$. We warn the reader that unfortunately the “bar” notation is used in the original article both for the closure of a subspace in \mathcal{H} (beginning of Section 2) and for denoting a distinguished subspace (Section 4).
- (iii) Birman's convention, kept in the translation, for an expression like “the operator A in the (Hilbert) subspace \mathcal{K} ”, is to indicate that the *possibly unbounded* operator A has a domain dense in \mathcal{K} and maps \mathcal{K} into itself. This is the case, for instance, in Section 2 for the operator B (as a self-adjoint operator on the Hilbert space U_1) and for the restriction of \tilde{S}^{-1} to the Hilbert space \mathcal{H}_+ .
- (iv) Despite the possible confusion, we kept Birman's standard to use the same symbol for operators acting on different spaces. This is the case of B in the ‘small’ space U_1 and in the ‘large’ space \mathcal{H} , for B^{-1} in the ‘small’ $\overline{R(B)}$ and in the ‘large’ $\overline{R(B)} \oplus U_0$, and for \tilde{S}^{-1} in the ‘small’ \mathcal{H}_+ and in the ‘large’ \mathcal{H} . Note also that B^{-1} and \tilde{S}^{-1} are the inverse of the restrictions of B and \tilde{S} out of their kernels.

К теории самосопряженных расширений положительно определенных операторов

М. Ш. Бирман (Ленинград)

Теория расширений симметричных операторов в гильбертовом пространстве нашла в настоящее время многочисленные приложения в анализе (проблема моментов) и в краевых задачах для дифференциальных уравнений. Особенно подробно разработана теория расширений для операторов с конечными индексами дефекта. Такие операторы всегда возникают при изучении одномерных краевых задач. Что касается краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных (эллиптического типа), то они, вообще говоря, приводят к операторам с бесконечными индексами дефекта. Существенно также, что эти операторы, как правило, оказываются полуограниченными. В связи с этим большой интерес для приложений представляет теория расширений симметричных полуограниченных операторов с бесконечными индексами дефекта. Основные результаты в этой области принадлежат К. Фридрихсу и М. Г. Крейну.

К. Фридрихс в работе [1] предложил специальный прием расширения симметричного полуограниченного оператора до самосопряженного, основанный на замыкании соответствующей квадратичной формы. Получающееся таким образом расширение имеет ту же нижнюю грань, что и исходный оператор.

Наиболее полно вопрос о самосопряженных расширениях полуограниченных операторов исследован в работе М. Г. Крейна [2]. С помощью дробно-линейного преобразования М. Г. Крейн свел проблему к построению расширений ограниченного симметричного оператора, заданного на неплотном множестве. Этим путем М. Г. Крейн выяснил, что среди полуограниченных самосопряженных расширений полуограниченного симметричного оператора есть одно («жесткое») расширение, которое обладает рядом замечательных экстремальных свойств. М. Г. Крейн показал также, что расширение оператора по Фридрихсу всегда приводит к жесткому расширению.

Из других работ по теории расширений большой интерес представляет работа М. И. Вишика [3]. Отказавшись от требования симметричности исходного оператора, М. И. Вишик рассматривает его расширения, обладающие теми или иными свойствами разрешимости, например расширения с ограниченным обратным оператором, а также некоторые другие. В случае, когда исходный оператор симметричен, выделяется также класс его самосопряженных расширений. Свои результаты М. И. Вишик прилагает к исследованию общих краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка.

Остановимся вкратце на примененном М. И. Вишиком методе исследования, ограничиваясь случаем симметричного оператора. Каждому расширению оператора М. И. Вишик сопоставляет некоторый оператор B , действующий в подпространстве нулей оператора, сопряженного с исходным. Свойства разрешимости расширения удается охарактеризовать в терминах соответствующего оператора B . С другой стороны, в приложении к краевым задачам М. И. Вишик выясняет, что оператор B непосредственно определяется граничными условиями задачи, если последние приведены к некоторому «каноническому» виду. Этим устанавливается связь между свойствами расширений исходного дифференциального оператора и видом краевых условий.

Возникает вопрос о характеристике в терминах оператора B (т. е. по существу в терминах краевых условий) дальнейших свойств расширений, а не только свойств разрешимости. Особый интерес для приложений представляет в связи с теорией М. Г. Крейна характеристика самосопряженных расширений положительно определенного* симметричного оператора.

В настоящей работе рассмотрены некоторые относящиеся сюда вопросы. Получена характеристика в терминах оператора B полуограниченных самосопряженных расширений исходного оператора, а также описаны соответствующие этим расширениям квадратичные формы. Кроме того, доказана одна теорема об отрицательной части спектра полуограниченных расширений и описаны симметричные положительно определенные расширения исходного оператора.

Краткое сообщение о результатах работы было опубликовано в ДАН СССР [7]. Приложения теории расширений к многомерным краевым задачам рассматривались в заметках автора [4], [5], [6].

§ 1. Некоторые результаты из теории расширений операторов

В этом параграфе мы для удобства дальнейшего изложения перечислим ряд результатов, полученных М. Г. Крейном и М. И. Вишиком.

Остановимся прежде всего на некоторых вспомогательных понятиях, введенных К. Фридрихсом и М. Г. Крейном. Пусть T — симметричный полуограниченный оператор с плотной в гильбертовом пространстве \mathcal{H} областью определения** $D(T)$. Каждому такому оператору будем сопоставлять линейное множество $D[T]$, представляющее замыкание $D(T)$ в смысле T -сходимости. Эта последняя определяется следующим образом: $g_n \xrightarrow{T} g$, если $g_n \in D(T)$, $g_n \rightarrow g$ и $(Tg_n - Tg_m, g_n - g_m) \rightarrow 0$ при $n, m \rightarrow \infty$. При таком замыкании функционал (Tf, g) естественным образом расширяется на $D[T]$. Это расширение, следуя М. Г. Крейну, будем обозначать через $T[f, g]$. Множество $D[T]$ можно рассматривать

* Задача о расширениях полуограниченного оператора очевидным образом сводится к задаче о расширениях оператора с положительной нижней гранью (положительно определенного).

** Под $D(A)$ ниже всюду понимается область определения оператора A . Через $R(A)$ будем обозначать область значений того же оператора, а через $m(A)$ — его нижнюю грань, если он — полуограниченный.

как полное гильбертово пространство, если скалярное произведение в нем ввести формулой

$$(f, g)_T = T[f, g] - \beta(f, g)$$

при произвольном $\beta < m(T)$. Если оператор T — положительный и самосопряженный, то, как показано М. Г. Крейном,

$$D[T] = D\left(T^{\frac{1}{2}}\right) \text{ и } T[f, g] = \left(T^{\frac{1}{2}}f, T^{\frac{1}{2}}g\right).$$

Отметим еще, что для оператора $T_\alpha = T + \alpha E$

$$D[T_\alpha] = D[T], \quad T_\alpha[f, g] = T[f, g] + \alpha(f, g).$$

Пусть S — замкнутый симметричный оператор с положительной нижней гранью (положительно определенный):

$$(Sf, f) \geq \gamma(f, f) \quad (\gamma = m(S) > 0)$$

для всех $f \in D(S)$. Оператор S допускает бесчисленное множество самосопряженных расширений, из которых хотя бы одно имеет ту же нижнюю грань γ , что и исходный оператор. Этим свойством, в частности, всегда обладает расширение, получаемое по К. Фридрихсу [1]. Следуя М. Г. Крейну, мы будем обозначать это расширение через S_μ и называть его жестким расширением оператора S . Прием К. Фридрихса состоит в построении множества $D[S]$ и функционала $S[f, g]$ на нем. Оказывается, что $D[S]$ является областью определения квадратного корня из некоторого самосопряженного расширения S_μ оператора S :

$$D(S) \subset D(S_\mu) \subset D[S] = D[S_\mu] = D\left(S_\mu^{\frac{1}{2}}\right).$$

Кроме того, для любых $f, g \in D[S]$

$$S[f, g] = S_\mu[f, g] = \left(S_\mu^{\frac{1}{2}}f, S_\mu^{\frac{1}{2}}g\right).$$

М. Г. Крейн показал, что S_μ является единственным полуограниченным самосопряженным расширением оператора S , область определения которого лежит в $D[S]$.

Обозначим через S^* оператор, сопряженный с S , и через U — множество решений уравнения $S^*u = 0$. Легко видеть*, что $U = \mathcal{H} \ominus R(S)$. М. Г. Крейном показано, что для всякого полуограниченного самосопряженного расширения \tilde{S} множество $D[\tilde{S}]$ разлагается в прямую сумму

$$D[\tilde{S}] = D[S] \dot{+} D[\tilde{S}] \cap U;$$

при этом $\tilde{S}[f, g] = S[f, g]$, если $f, g \in D[S]$, и $\tilde{S}[f, u] = \tilde{S}[u, f] = 0$, если $f \in D[S]$ и $u \in D[\tilde{S}] \cap U$.

Отметим еще одно предложение М. Г. Крейна.

* Размерность подпространства U равна дефектному числу оператора S . Нигде в дальнейшем мы не будем предполагать подпространство U конечномерным.

Если \tilde{S}_1 и \tilde{S}_2 — полуограниченные самосопряженные расширения оператора S , то для справедливости хотя бы при одном $\alpha > -m(\tilde{S}_k)$ ($k = 1, 2$) (а тогда и при всех таких α) неравенства

$$(\tilde{S}_1 + \alpha E)^{-1} \leq (\tilde{S}_2 + \alpha E)^{-1},$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$D[\tilde{S}_1] \cap U \subset D[\tilde{S}_2] \cap U \text{ и } \tilde{S}_2[u, u] \leq \tilde{S}_1[u, u] \quad (u \in D[\tilde{S}_1] \cap U).$$

Отсюда следует, в частности, что

$$S_\mu^{-1} \leq \tilde{S}^{-1}, \text{ если } m(\tilde{S}) > 0.$$

Ниже мы будем ссылаться и на другие результаты М. Г. Крейна. Соответствующие формулировки будут приводиться по ходу изложения.

В заключение приведем следующую важную теорему М. И. Вишика.

Теорема 1. *Область определения сопряженного с S оператора S^* разлагается в прямую сумму*

$$D(S^*) = D(S) \dot{+} S_\mu^{-1}U \dot{+} U. \quad (1)$$

Для того чтобы оператор \tilde{S} являлся самосопряженным расширением оператора S , необходимо и достаточно, чтобы оператор \tilde{S} задавался как часть S^ на прямой сумме*

$$D(\tilde{S}) = D(S) \dot{+} (S_\mu^{-1} + B)\tilde{U}_1 \dot{+} U_0; \quad (2)$$

здесь U_1 — некоторое подпространство U , B — самосопряженный в U_1 оператор, $\tilde{U}_1 = D(B)$ — плотное в U_1 множество, $U_0 = U \ominus U_1$.

Заметим, что утверждения этой теоремы останутся в силе, если в разложениях (1) и (2) заменить жесткое расширение S_μ любым другим фиксированным самосопряженным расширением, имеющим всюду в \mathcal{H} ограниченный обратный.

Для удобства дальнейшего изложения мы приведем здесь сравнительно простое доказательство теоремы 1, несколько отличающееся от доказательства М. И. Вишика.

Установим сперва справедливость разложения (1). Ясно, что

$$D(S) \dot{+} S_\mu^{-1}U \dot{+} U \subseteq D(S^*),$$

так как $D(S) \subset D(S^*)$, $U \subset D(S^*)$ и $S_\mu^{-1}U \subset D(S_\mu) \subset D(S^*)$. Докажем справедливость обратного включения. Пусть $g \in D(S^*)$, $S^*g = h$ и $f = S_\mu^{-1}h$. Поскольку $S^*(g-f) = S^*g - S_\mu f = h - h = 0$, то $u = g - f \in U$. Так как $\mathcal{H} = R(S) \oplus U$, то $h = h_0 + \bar{u}$, где $h_0 \in R(S)$ и $\bar{u} \in U$. Отсюда следует, что $f = S_\mu^{-1}(h_0 + \bar{u}) = S^{-1}h_0 + S_\mu^{-1}\bar{u}$ и $g = f_0 + S_\mu^{-1}\bar{u} + u$, где $f_0 = S^{-1}h_0 \in D(S)$.

Таким образом,

$$D(S^*) \subseteq D(S) \dot{+} S_\mu^{-1}U \dot{+} U.$$

Остается проверить, что сумма (1) — прямая. Пусть $g = f_0 + S_\mu^{-1}\bar{u} + u = 0$. Тогда $S^*g = Sf_0 + \bar{u} = 0$ и, поскольку $Sf_0 \perp \bar{u}$, $Sf_0 = \bar{u} = 0$. Отсюда следует, что $f_0 = S^{-1}(Sf_0) = 0$ и $S_\mu^{-1}\bar{u} = 0$. Так как $u = g - f_0 - S_\mu^{-1}\bar{u} = 0$, то этим доказано, что сумма (1) — прямая.

Перейдем к доказательству справедливости разложения (2).

Необходимость. Пусть \tilde{S} — самосопряженное расширение S и U_0 — подпространство решений уравнения $\tilde{S}u_0 = 0$. Очевидно, $U_0 \subseteq U$. Введем обозначения: $U_1 = U \ominus U_0$, $\mathcal{H}_+ = \mathcal{H} \ominus U_0 = R(S) \oplus U_1$. Так как множество $R(\tilde{S})$ плотно в \mathcal{H}_+ , то $R(\tilde{S})$ можно представить в виде

$$R(\tilde{S}) = R(S) \dot{+} \tilde{U}_1, \tag{3}$$

где \tilde{U}_1 — некоторое плотное в U_1 множество. Оператор \tilde{S} , если его рассматривать только в \mathcal{H}_+ , имеет на $R(\tilde{S})$ обратный оператор \tilde{S}^{-1} . Известно, что оператор \tilde{S}^{-1} — самосопряженный в \mathcal{H}_+ и $\tilde{S}^{-1}R(\tilde{S}) = P_+D(\tilde{S})$; здесь P_+ — оператор проектирования в \mathcal{H}_+ . Мы распространим \tilde{S}^{-1} с сохранением самосопряженности на всё \mathcal{H} , полагая его в U_0 равным нулю. Применяя \tilde{S}^{-1} к разложению (3), найдем, что

$$P_+D(\tilde{S}) = P_+D(S) + \tilde{S}^{-1}\tilde{U}_1. \tag{4}$$

Поскольку $D(\tilde{S}) = P_+D(\tilde{S}) + U_0$ и $P_+D(S) + U_0 = D(S) + U_0$, (4) можно записать в виде

$$D(\tilde{S}) = D(S) + \tilde{S}^{-1}\tilde{U}_1 + U_0. \tag{5}$$

Рассмотрим оператор $B = \tilde{S}^{-1} - P_+S_\mu^{-1}P_+$. Это самосопряженный оператор с плотной в \mathcal{H} областью определения $D(B) = D(\tilde{S}^{-1}) = R(\tilde{S}) \dot{+} U_0$. Ясно, что $BU_0 = 0$. Покажем, что $BR(S) = 0$. Действительно, пусть $h_0 \in R(S)$ и $f_0 = S^{-1}h_0$. Тогда

$$Bh_0 = \tilde{S}^{-1}h_0 - P_+S_\mu^{-1}P_+h_0 = P_+f_0 - P_+S_\mu^{-1}h_0 = P_+f_0 - P_+f_0 = 0.$$

Мы видим, что подпространства U_0 и $R(S)$ являются инвариантными для оператора B , а потому B будет самосопряженным в U_1 оператором, если его рассматривать только на \tilde{U}_1 . При помощи оператора B преобразуем разложение (5):

$$\begin{aligned} D(\tilde{S}) &= D(S) + [P_+S_\mu^{-1}P_+ + (\tilde{S}^{-1} - P_+S_\mu^{-1}P_+)]\tilde{U}_1 + U_0 = \\ &= D(S) + (P_+S_\mu^{-1} + B)\tilde{U}_1 + U_0 = D(S) + P_+(S_\mu^{-1} + B)\tilde{U}_1 + U_0. \end{aligned}$$

Так как

$$P_+(S_\mu^{-1} + B)\tilde{U}_1 + U_0 = (S_\mu^{-1} + B)\tilde{U}_1 + U_0,$$

то окончательно для $D(\tilde{S})$ можно написать разложение:

$$D(\tilde{S}) = D(S) + (S_\mu^{-1} + B)\tilde{U}_1 + U_0.$$

Последняя сумма — прямая, так как она является частью прямой суммы (1). Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть U_0 — какое-либо подпространство U и B — некоторый самосопряженный в $U_1 = U \ominus U_0$ оператор, область определения которого обозначим через \tilde{U}_1 . Образует прямую сумму

$$D(\tilde{S}) = D(S) \dot{+} (S_\mu^{-1} + B)\tilde{U}_1 + U_0$$

и зададим на ней оператор \tilde{S} как часть оператора S^* . Очевидно, \tilde{S}

является расширением оператора S . Покажем, что это расширение — самосопряженное. Пусть для всех $g \in D(\tilde{S})$

$$(\tilde{S}g, t) = (g, t^*). \quad (6)$$

Нужно показать, что $t \in D(\tilde{S})$ и $\tilde{S}t = t^*$. Очевидно, $t \in D(S^*)$ и $t^* = S^*t$, а потому, согласно разложению (1), $t = \varphi_0 + S_\mu^{-1}\bar{v} + v$, $t^* = S\varphi_0 + \bar{v}$, где $\varphi_0 \in D(S)$, $\bar{v}, v \in U$. В качестве g подставим в (6) произвольный элемент $u_0 \in U_0$. Тогда получим, что

$$(t^*, u_0) = (t, \tilde{S}u_0) = 0,$$

т. е. $t^* \perp U_0$. Поскольку $t^* = S\varphi_0 + \bar{v}$ и $S\varphi_0 \perp U$, отсюда следует, что $\bar{v} \in U_1$. Элемент v представим в виде $v = v_0 + v_1$, где $v_0 \in U_0$, $v_1 \in U_1$.

В качестве g возьмем теперь в (6) произвольный элемент вида

$$g = f_0 + S_\mu^{-1}u_1 + Bu_1, \text{ где } f_0 \in D(S), u_1 \in \tilde{U}_1.$$

Для краткости обозначим: $\varphi = \varphi_0 + S_\mu^{-1}\bar{v}$, $f = f_0 + S_\mu^{-1}u_1$; $\varphi, f \in D(S_\mu)$. Поскольку $\tilde{S}g = S^*g = S^*f + S^*Bu_1 = S_\mu f$ и $t^* = S^*t = S_\mu\varphi$, мы получаем из (6) равенство

$$(S_\mu f, \varphi + v_1 + v_0) = (f + Bu_1, S_\mu\varphi). \quad (7)$$

Так как $(S_\mu f, \varphi) = (f, S_\mu\varphi)$, $S_\mu f = Sf_0 + u_1$ и $S_\mu\varphi = S\varphi_0 + \bar{v}$, то из (7) следует, что

$$(Sf_0 + u_1, v_1 + v_0) = (Bu_1, S\varphi_0 + \bar{v}).$$

Наконец, замечая, что $Sf_0 \perp v_1 + v_0$, $u_1 \perp v_0$ и $Bu_1 \perp S\varphi_0$, приходим к соотношению

$$(Bu_1, \bar{v}) = (u_1, v_1). \quad (8)$$

Поскольку u_1 — произвольный элемент из $D(B) = \tilde{U}_1$, $\bar{v}, v_1 \in U_1$ и оператор B — самосопряженный в U_1 , из (8) следует, что $\bar{v} \in D(B)$ и $v_1 = B\bar{v}$, а потому

$$t = \varphi_0 + (S_\mu^{-1} + B)\bar{v} + v_0.$$

Последнее равенство показывает, что $t \in D(\tilde{S})$. Таким образом, оператор \tilde{S} — самосопряженный, и теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Полученная в процессе доказательства теоремы формула

$$B = \tilde{S}^{-1} - P_+ S_\mu^{-1} P_+ \quad (9)$$

позволяет однозначно восстанавливать оператор B по расширению \tilde{S} . Из этой формулы следует также, что ограниченность оператора B является необходимым и достаточным условием ограниченности рассматриваемого на $R(\tilde{S})$ обратного оператора \tilde{S}^{-1} . Если к тому же U_0 состоит только из нулевого элемента, то \tilde{S} имеет ограниченный обратный всюду в \mathcal{H} .

§ 2. О полуограниченных расширениях положительно определенного оператора

Цель настоящего параграфа состоит в характеристике полуограниченных расширений оператора S в терминах соответствующих операторов B . Ниже, наряду с B , нам неоднократно придется вводить в рас-

смотрение обратный оператор B^{-1} . Очевидно, это — самосопряженный в $R(B)$ оператор с областью определения $R(B)$. Мы, однако, всегда будем считать B^{-1} определенным на более широком множестве

$$D(B^{-1}) = R(B) \dot{+} U_0,$$

полагая $B^{-1}U_0 = 0$.

Лемма 1. Если \tilde{S} — полуограниченное самосопряженное расширение оператора S и B — соответствующий (в смысле теоремы 1) оператор в U_1 , то

$$D(B^{-1}) \subset D[\tilde{S}]$$

и для всяких $v_1, v_2 \in D(B^{-1})$

$$\tilde{S}[v_1, v_2] = (B^{-1}v_1, v_2). \tag{10}$$

Доказательство. Пусть $v \in D(B^{-1})$. По определению множества $D(B^{-1})$, $v = Bu + v_0$, где $u \in \tilde{U}_1$ и $v_0 \in U_0$. Согласно теореме 1, элемент $g = S_u^{-1}u + Bu + v_0$ содержится в $D(\tilde{S})$. Так как $f = S_u^{-1}u \in D(S_u) \subset D[S] \subset D[\tilde{S}]$ и $g \in D(\tilde{S}) \subset D[\tilde{S}]$, то элемент $v = g - f \in D[\tilde{S}]$. Далее, поскольку $\tilde{S}g = u$, то

$$\tilde{S}[g, g] = (\tilde{S}g, g) = (u, f + v) = (S_u f, f) + (u, v) = S[f, f] + (B^{-1}v, v).$$

С другой стороны, согласно цитированным выше результатам М. Г. Крейна, $\tilde{S}[f, v] = 0$, и потому

$$\tilde{S}[g, g] = S[f, f] + \tilde{S}[v, v].$$

Сопоставляя это равенство с предыдущим, найдем, что

$$\tilde{S}[v, v] = (B^{-1}v, v).$$

Переход к билинейному соотношению (10) производится обычным путем. Лемма доказана.

Сделаем еще одно нужное для дальнейшего замечание. Пусть A — самосопряженный положительно определенный оператор. Тогда при любом $h \in \mathcal{H}$

$$\sup_{f \in D(A)} \frac{|(f, h)|^2}{(Af, f)} = (A^{-1}h, h).$$

Действительно, полагая $g = A^{-\frac{1}{2}}f$, найдем, что

$$\sup_{f \in D(A)} \frac{|(f, h)|^2}{(Af, f)} = \sup_{g \in \mathcal{H}} \frac{|(A^{-\frac{1}{2}}g, h)|^2}{\|g\|^2} = \sup_{\|g\|=1} |(g, A^{-\frac{1}{2}}h)|^2.$$

Согласно неравенству Буняковского, верхняя грань последнего выраже-

ния достигается при $g = \frac{A^{-\frac{1}{2}}h}{\|A^{-\frac{1}{2}}h\|}$, и, следовательно,

$$\sup_{f \in D(A)} \frac{|(f, h)|^2}{(Af, f)} = (A^{-1}h, h).$$

В частности, если $A = S_\mu - \alpha E$ ($\alpha < m(S) = \gamma$) и $R_\alpha = (S_\mu - \alpha E)^{-1}$, то при любом $h \in \mathcal{H}$

$$\sup_{f \in D(S_\mu)} \frac{|(f, h)|^2}{(S_\mu f, f) - \alpha(f, f)} = (R_\alpha h, h). \quad (11)$$

Теорема 2. Для того чтобы самосопряженное расширение \tilde{S} оператора S удовлетворяло при всех $g \in D(\tilde{S})$ условию полуограниченности

$$(\tilde{S}g, g) \geq \alpha(g, g) \quad (\alpha < \gamma), \quad (12)$$

необходимо и достаточно, чтобы при всех $v \in D(B^{-1})$ выполнялось неравенство

$$(B^{-1}v, v) \geq \alpha(v, v) + \alpha^2(R_\alpha v, v). \quad (13)$$

Доказательство. Условие (12) эквивалентно условию

$$\tilde{S}[g, g] \geq \alpha(g, g), \quad g \in D[\tilde{S}], \quad (14)$$

которое получается из (12) замыканием в смысле \tilde{S} -сходимости. Пусть, в частности, $g = f + v$, где $f \in D(S_\mu)$ и $v \in D(B^{-1})$. Согласно лемме 1, $g \in D[\tilde{S}]$ и

$$\tilde{S}[g, g] = (S_\mu f, f) + (B^{-1}v, v).$$

Условие (14) запишем в виде:

$$(S_\mu f, f) + (B^{-1}v, v) \geq \alpha(f, f) + \alpha(f, v) + \alpha(v, f) + \alpha(v, v).$$

Заменяя здесь f на ξf и v на ηv , получим неравенство

$$\begin{aligned} [(S_\mu f, f) - \alpha(f, f)] \xi \bar{\xi} - \alpha(f, v) \xi \bar{\eta} - \alpha(v, f) \bar{\xi} \eta + \\ + [(B^{-1}v, v) - \alpha(v, v)] \eta \bar{\eta} \geq 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Так как $\alpha < \gamma = m(S)$ и, следовательно, $(S_\mu f, f) - \alpha(f, f) \geq 0$, то при всяких $f \in D(S_\mu)$ и $v \in D(B^{-1})$ необходимым и достаточным условием положительности квадратичной формы в левой части (15) будет выполнение неравенства

$$\alpha^2 |(f, v)|^2 \leq [(B^{-1}v, v) - \alpha(v, v)] [(S_\mu f, f) - \alpha(f, f)]. \quad (16)$$

Покажем, что это условие является не только необходимым, но и достаточным для выполнения неравенства (12). Действительно, если $g \in D(\tilde{S})$, то, согласно теореме 1,

$$g = f_0 + S_\mu^{-1}u_1 + Bu_1 + u_0,$$

где $f_0 \in D(S)$, $u_1 \in \tilde{U}_1$ и $u_0 \in U_0$. Так как $f = f_0 + S_\mu^{-1}u_1 \in D(S_\mu)$ и $v = Bu_1 + u_0 \in D(B^{-1})$, то из (16) следует (15). Полагая в неравенстве (15) $\xi = \eta = 1$, замечая, что $g = f + v$, и проделывая выкладки в обратном порядке, найдем, что выполнено условие (14), совпадающее для $g \in D(\tilde{S})$ с условием (12). Для доказательства теоремы остается записать условие (16) в виде

$$(B^{-1}v, v) - \alpha(v, v) \geq \frac{\alpha^2 |(f, v)|^2}{(S_\mu f, f) - \alpha(f, f)}$$

и сравнить с (11).

Следствия:

1. Если оператор \tilde{S} — полуограниченный и $m(\tilde{S}) \geq \alpha$, то оператор B^{-1} — также полуограниченный и $m(B^{-1}) \geq \alpha$.

Это утверждение непосредственно следует из формулы (13).

2. Для того чтобы оператор \tilde{S} был положительным, необходимо и достаточно, чтобы соответствующий оператор B^{-1} был положительным.

Для доказательства этого утверждения достаточно положить в (12) и (13) $\alpha = 0$.

3. Для того чтобы оператор \tilde{S} был положительно определенным, необходимо и достаточно, чтобы оператор B^{-1} был положительно определенным.

Действительно, если $m(B^{-1}) > 0$, то $m(\tilde{S}) \geq 0$. Оператор B^{-1} имеет ограниченный обратный, а потому U_0 содержит только нулевой элемент, и оператор B ограничен. Согласно замечанию к теореме 1, \tilde{S} имеет тогда ограниченный обратный всюду в \mathcal{H} . Поэтому равенство $m(\tilde{S}) = 0$ невозможно, и оператор \tilde{S} — положительно определенный. Обратно, если $m(\tilde{S}) > 0$, то, согласно (13), $m(B^{-1}) \geq m(\tilde{S}) > 0$.

4. Если $m(B^{-1}) \geq c$ и $c > -\gamma$, то соответствующий оператор \tilde{S} полуограничен и

$$m(\tilde{S}) \geq \alpha = \frac{\gamma c}{\gamma + c}.$$

Легко видеть, что $\alpha < \gamma$. Условие (13) выполнено, так как выполнено более сильное условие

$$(B^{-1}v, v) - \alpha(v, v) \geq \frac{\alpha^2}{\gamma - \alpha}(v, v), \quad v \in D(B^{-1}),$$

представляющее собой иную запись неравенства $(B^{-1}v, v) \geq c(v, v)$.

5. Для того чтобы самосопряженное расширение \tilde{S} оператора S имело нижнюю грань $m(\tilde{S}) = \gamma$, необходимо и достаточно, чтобы условие (13) выполнялось при всех $\alpha < \gamma$.

Доказательство этого утверждения очевидно.

Замечание. М. Г. Крейн указал условия, при которых жесткое расширение S_γ является единственным самосопряженным расширением оператора S с нижней гранью $\gamma = m(S)$ (см. теоремы 8 и 9 работы [2]). Другой путь получения этих условий дает следствие 5.

Как мы уже отмечали, для полуограниченных расширений \tilde{S} оператора S имеет место разложение М. Г. Крейна:

$$D[\tilde{S}] = D[S] \dot{+} D[\tilde{S}] \cap U. \quad (17)$$

Представляет интерес характеристика множества $D[\tilde{S}] \cap U$ в терминах оператора B . Доказательству соответствующей теоремы предположим лемму.

Лемма 2. Если \tilde{S} — полуограниченное расширение S и $\beta < m(\tilde{S})$, то существует положительное число $\eta < 1$ такое, что

$$\beta^2 |(f, v)|^2 \leq \eta^2 [(S_\nu f, f) - \beta(f, f)] [(B^{-1}v, v) - \beta(v, v)] \quad (18)$$

для всех $f \in D(S_\nu)$ и $v \in D(B^{-1})$.

Доказательство. Согласно (11), для доказательства неравенства (18) достаточно установить справедливость соотношения

$$\beta^2 (R_\beta v, v) \leq \eta^2 [(B^{-1}v, v) - \beta (v, v)],$$

которое мы перепишем в виде

$$(B^{-1}v, v) \geq \frac{\beta^2 (R_\beta v, v)}{\eta^2} + \beta (v, v). \quad (19)$$

Пусть число α таково, что $\beta < \alpha < m(\tilde{S})$. Согласно теореме 2,

$$(B^{-1}v, v) \geq \alpha^2 (R_\alpha v, v) + \alpha (v, v). \quad (20)$$

Покажем, что число η можно выбрать так, чтобы для всех $v \in D(B^{-1})$ выполнялось неравенство

$$\alpha^2 (R_\alpha v, v) + \alpha (v, v) \geq \frac{\beta^2 (R_\beta v, v)}{\eta^2} + \beta (v, v). \quad (21)$$

Обозначим через \mathcal{E}_λ спектральную функцию оператора S_μ и перепишем (21) в виде

$$\int_\gamma^\infty \left(\frac{\alpha^2}{\lambda - \alpha} + \alpha - \frac{\beta^2}{(\lambda - \beta)\eta^2} - \beta \right) d(\mathcal{E}_\lambda v, v) \geq 0. \quad (22)$$

Предположим сначала, что $\beta < 0$. Тогда можно считать также, что $\alpha < 0$. Так как

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^2}{\lambda - \alpha} + \alpha - \frac{\beta^2}{\eta^2(\lambda - \beta)} - \beta &= \frac{(\alpha - \beta)\lambda^2}{(\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)} - \frac{(\eta^{-2} - 1)\beta^2}{\lambda - \beta} \geq \\ &\geq \frac{(\alpha - \beta)\gamma^2}{(\gamma - \beta)(\gamma - \alpha)} - \frac{(\eta^{-2} - 1)\beta^2}{\gamma - \beta}, \end{aligned}$$

то при достаточно малом значении числа $\theta = \eta^{-2} - 1$ неравенство (21), действительно, выполнено. Если $\beta \geq 0$, то $\alpha > 0$; в этом случае справедливость (21) следует из соотношения

$$\frac{(\alpha - \beta)\lambda^2}{(\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)} - \frac{\theta\beta^2}{\lambda - \beta} \geq (\alpha - \beta) - \frac{\theta\beta^2}{\gamma - \beta},$$

если θ выбрано достаточно малым. Сопоставляя неравенства (21), (20) и (19), мы убеждаемся в справедливости леммы.

Заметим еще, что поскольку

$$\begin{aligned} (S_\mu f, f) - \beta (f, f) &= \tilde{S}[f, f] - \beta (f, f) = (f, f)_{\tilde{S}}, \\ (B^{-1}v, v) - \beta (v, v) &= \tilde{S}[v, v] - \beta (v, v) = (v, v)_{\tilde{S}} \end{aligned}$$

и

$$-\beta (f, v) = \tilde{S}[f, v] - \beta (f, v) = (f, v)_{\tilde{S}},$$

мы можем записать неравенство (18) в виде

$$|(f, v)_{\tilde{S}}|^2 \leq \eta^2 (f, f)_{\tilde{S}} (v, v)_{\tilde{S}}. \quad (23)$$

Неравенство (23) показывает, что «угол» между многообразиями $D(S_\mu)$ и $D(B^{-1})$ в гильбертовом пространстве $D[\tilde{S}]$ отличен от нуля.

Теорема 3. Для всякого полуограниченного расширения оператора S

$$D[\tilde{S}] \cap U = D[B^{-1}] \quad (24)$$

и, следовательно, согласно (17),

$$D[\tilde{S}] = D[S] + D[B^{-1}]. \quad (25)$$

Доказательство. Пусть число $\beta < m(\tilde{S})$. Согласно следствию 1 из теоремы 2, оператор B^{-1} — полуограниченный и $m(B^{-1}) > \beta$. Множество $D[B^{-1}]$ представляет собой замыкание $D(B^{-1})$ в метрике, определяемой скалярным произведением

$$(v_1, v_2)_{B^{-1}} = (B^{-1}v_1, v_2) - \beta(v_1, v_2), \quad v_1, v_2 \in D(B^{-1}).$$

Согласно лемме 1, $D(B^{-1}) \subset D[\tilde{S}]$ и

$$(v_1, v_2)_{B^{-1}} = (B^{-1}v_1, v_2) - \beta(v_1, v_2) = \tilde{S}[v_1, v_2] - \beta(v_1, v_2) = (v_1, v_2)_{\tilde{S}},$$

и, следовательно, замыкание в норме $(v, v)_{B^{-1}}$ не выводит из $D[\tilde{S}]$. С другой стороны, так как

$$(v, v)_{B^{-1}} = (B^{-1}v, v) - \beta(v, v) \geq (m(B^{-1}) - \beta)(v, v),$$

то замыкание $D(B^{-1})$ в норме $(v, v)_{B^{-1}}$ не выводит из U . Таким образом,

$$D[B^{-1}] \subset D[\tilde{S}] \cap U.$$

Установим теперь обратное включение. Пусть $u \in D[\tilde{S}] \cap U$. По определению множества $D[\tilde{S}]$ найдется последовательность $\{g_k\} \subset D(\tilde{S})$ такая, что

$$\|g_k - u\|_{\tilde{S}} \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty. \quad (26)$$

Представляя g_k в виде $g_k = f_k + v_k$, $f_k \in D(S_\mu)$, $v_k \in D(B^{-1})$, получим, согласно (23), что

$$\begin{aligned} \|g_k - g_m\|_{\tilde{S}}^2 &= \|f_k - f_m\|_{\tilde{S}}^2 - 2\mathcal{R}(f_k - f_m, v_k - v_m)_{\tilde{S}} + \|v_k - v_m\|_{\tilde{S}}^2 \geq \\ &\geq \|f_k - f_m\|_{\tilde{S}}^2 - 2\eta \|f_k - f_m\|_{\tilde{S}} \cdot \|v_k - v_m\|_{\tilde{S}} + \|v_k - v_m\|_{\tilde{S}}^2 \geq \\ &\geq (1 - \eta) [\|f_k - f_m\|_{\tilde{S}}^2 + \|v_k - v_m\|_{\tilde{S}}^2]. \end{aligned}$$

Теперь из (26) следует, что

$$\|f_k - f_m\|_{\tilde{S}} \rightarrow 0 \text{ при } k, m \rightarrow \infty, \quad \|v_k - v_m\|_{\tilde{S}} \rightarrow 0 \text{ при } k, m \rightarrow \infty.$$

Так как $\|v_k - v_m\|_{\tilde{S}} = \|v_k - v_m\|_{B^{-1}}$, то последовательность $\{v_k\}$ сходится к некоторому элементу $v \in D[B^{-1}]$. Точно так же последовательность $\{f_k\}$ сходится к некоторому элементу $f \in D[S]$. Переходя к пределу в равенстве $g_k = f_k + v_k$, найдем, что $u = f + v$. Так как $f = u - v \in U$, то необходимо $f = 0$ и $u = v \in D[B^{-1}]$. Теорема доказана.

Следствия:

1. Если оператор \tilde{S} положителен, то

$$D[\tilde{S}] = D[S] \dot{+} R(B^{\frac{1}{2}}) \dot{+} U_0.$$

Действительно, если $\tilde{S} \geq 0$, то $B^{-1} \geq 0$, а тогда

$$D[B^{-1}] = D(B^{-\frac{1}{2}}) = R(B^{\frac{1}{2}}) \dot{+} U_0.$$

2. Для $v \in D[\tilde{S}] \cap U$

$$\tilde{S}[v, v] = B^{-1}[v, v].$$

Действительно, $v \in D[B^{-1}]$ и, следовательно, найдется последовательность $\{v_n\} \subset D(B^{-1})$, такая, что $v_n \xrightarrow{B^{-1}} v$, или, что то же, $v_n \xrightarrow{\tilde{S}} v$. Остается заметить, что

$$B^{-1}[v, v] = \lim_{n \rightarrow \infty} (B^{-1}v_n, v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{S}[v_n, v_n] = \tilde{S}[v, v].$$

§ 3. О спектре самосопряженных расширений положительно определенного оператора

На основании сведений о характере спектра оператора B иногда удается судить о спектре соответствующего расширения \tilde{S} . Так, при доказательстве теоремы 1 мы установили (формула (9)), что оператор $\tilde{S}^{-1} - P_+ S_\mu^{-1} P_+$ совпадает с оператором B , если последний распространить на $R(S) \oplus U_0$, полагая его там равным нулю. Отсюда следует, что при условии полной непрерывности оператора S_μ^{-1} полная непрерывность операторов \tilde{S}^{-1} и B имеет место одновременно.

М. Г. Крейн^{*} получили теоремы, позволяющие судить о числе отрицательных собственных значений самосопряженных расширений положительно определенного оператора с конечным индексом дефекта. Пользуясь теоремами 1 и 3, результат М. Г. Крейна можно сформулировать следующим образом:

Число отрицательных собственных значений (с учетом их кратности) оператора \tilde{S} в точности равно числу отрицательных собственных значений оператора B^{-1} .

Обобщением результата М. Г. Крейна на случай оператора S с бесконечным индексом дефекта является следующая

Теорема 4. Для того чтобы отрицательная часть спектра самосопряженного расширения \tilde{S} оператора S состояла из ограниченного снизу множества собственных значений конечного ранга и не имела отличных от нуля точек сгущения, необходимо и достаточно, чтобы тем же свойством обладала отрицательная часть спектра оператора B^{-1} . При этом, если один из операторов \tilde{S} , B^{-1} имеет конечное число отрицательных собственных значений, то и другой оператор имеет точно такое же число отрицательных собственных значений.

Доказательство. Доказательство теоремы основывается на следующем очевидном замечании:

Если G — конечномерное подпространство \mathcal{H} и W — линейное множество размерности, большей чем G , то W содержит элемент, ортогональный к G .

Начнем с доказательства необходимости первого утверждения. Из условия теоремы следует, что \tilde{S} — полуограниченный оператор. Пусть E_λ — разложение единицы для \tilde{S} , $m(\tilde{S}) = \alpha < 0$, $m(B^{-1}) = \delta$ (согласно

* См. теоремы 19 и 20 работы [2].

следствию 1 из теоремы 2, $\delta \geq \alpha$), F_t — разложение единицы для B^{-1} и V — замыкание в \mathcal{H} множества $D(B^{-1})$. Отметим, что для $g \in D[\tilde{S}]$

$$\tilde{S}[g, g] = \int_{\alpha}^{\infty} \lambda d(E_{\lambda}g, g). \tag{27}$$

Действительно, полагая $T = \tilde{S} - \beta E$ ($\beta < \alpha$), видим, что $T > 0$, и, следовательно, для $g \in D[T]$

$$T[g, g] = \|T^{\frac{1}{2}}g\|^2 = \int_{\alpha}^{\infty} (\lambda - \beta) d(E_{\lambda}g, g) = \int_{\alpha}^{\infty} \lambda d(E_{\lambda}g, g) - \beta(g, g).$$

Отсюда, поскольку $\tilde{S}[g, g] = T[g, g] + \beta(g, g)$, получаем формулу (27). Применяя ее к $v \in D(B^{-1})$ и замечая, что

$$\tilde{S}[v, v] = (B^{-1}v, v) = \int_{\delta}^{\infty} t d(F_t v, v), \tag{28}$$

получим, сравнивая (27) и (28), неравенство

$$\int_{\delta}^{\infty} t d(F_t v, v) \geq \int_{\alpha}^{\infty} \lambda d(E_{\lambda}v, v). \tag{29}$$

Пусть для B^{-1} утверждение теоремы не выполнено. Тогда найдется такой промежуток $\Delta = [\delta, -\varepsilon]$ ($\varepsilon > 0$), что $F(\Delta)V$ бесконечномерно*.

Пусть $\Delta_1 = [\alpha, -\frac{\varepsilon}{2}]$. Согласно условию теоремы, подпространство $E(\Delta_1)\mathcal{H}$ конечномерно, а потому найдется отличный от нуля элемент $\bar{v} \in F(\Delta)V$, ортогональный к $E(\Delta_1)\mathcal{H}$. Так как $\bar{v} \in D(B^{-1})$, то, применяя неравенство (29) к \bar{v} , получим, что

$$\int_{\delta}^{-\varepsilon} t d(F_t \bar{v}, \bar{v}) \geq \int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\alpha} \lambda d(E_{\lambda} \bar{v}, \bar{v}).$$

Но тогда

$$\begin{aligned} -\varepsilon(\bar{v}, \bar{v}) &\geq \int_{\delta}^{-\varepsilon} t d(F_t \bar{v}, \bar{v}) \geq \int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\alpha} \lambda d(E_{\lambda} \bar{v}, \bar{v}) \geq \\ &\geq -\frac{\varepsilon}{2} \int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\alpha} d(E_{\lambda} \bar{v}, \bar{v}) \geq -\frac{\varepsilon}{2}(\bar{v}, \bar{v}), \end{aligned}$$

что невозможно. Необходимость первого утверждения доказана.

Переходим к доказательству достаточности. Заметим предварительно, что, если \tilde{S} — самосопряженное расширение S ,

$$\begin{aligned} g_h \in D(\tilde{S}) \cap E[-\infty, -\varepsilon]\mathcal{H} \quad (\varepsilon > 0), \quad g_h = f_h + v_h, \\ f_h \in D(S_{\mu}), \quad v_h \in D(B^{-1}) \end{aligned}$$

* Здесь обозначено, как обычно, $F(\Delta) = F_{\delta} - F_{-\varepsilon}$.

и g_k линейно независимы, то соответствующие им элементы v_k также линейно независимы. Действительно, если при каких-нибудь значениях

постоянных c_k $\sum_{k=1}^n c_k v_k = 0$, то

$$g = \sum_{k=1}^n c_k g_k = \sum_{k=1}^n c_k f_k \in D(S_\mu) \text{ и } (\tilde{S}g, g) = (S^*g, g) = (S_\mu g, g) \geq \gamma(g, g),$$

что невозможно, так как $g \in E[-\infty; -\varepsilon] \mathcal{H}$ и $g \neq 0$.

Пусть для \tilde{S} утверждение теоремы не выполнено. Тогда найдется такое $\varepsilon > 0$, что подпространство $E[-\infty; -\varepsilon] \mathcal{H}$ будет бесконечномерным. Вместе с ним будет бесконечномерным и плотное в нем линейное множество $D(\tilde{S}) \cap E[-\infty; -\varepsilon] \mathcal{H}$. Применяя разложение $g = f + v$, $f \in D(S_\mu)$, $v \in D(B^{-1})$ ко всем элементам $g \in D(\tilde{S}) \cap E[-\infty; -\varepsilon] \mathcal{H}$, рассмотрим линейное множество соответствующих элементов v , которое обозначим через V_ε . На основании замечания о линейной независимости элементов v можно утверждать, что множество V_ε также бесконечномерно. Пусть $\delta = m(B^{-1})$, $\Delta_h = [\delta; -h]$ и число h выбрано удовлетворяющим условиям: $0 < h < \gamma$, $-h > \delta$, $\frac{\gamma h}{\gamma - h} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Из условия теоремы следует, что подпространство $F(\Delta_h) V$ конечномерно. Поэтому множество V_ε содержит элемент v' , ортогональный к подпространству $F(\Delta_h) V$. Пусть v' соответствует элементу g' из $D(\tilde{S}) \cap E[-\infty; -\varepsilon] \mathcal{H}$. Согласно замечанию о линейной независимости, такой элемент определяется однозначно. Положим $f' = g' - v'$ и покажем, что

$$(\tilde{S}g', g') \geq -\frac{\varepsilon}{2}(g', g'). \quad (30)$$

Это можно сделать тем же путем, каким доказана теорема 2 и следствие 4 из нее. Запишем (30) в виде

$$\begin{aligned} & [(S_\mu f', f') + \frac{\varepsilon}{2}(f', f')] + \frac{\varepsilon}{2}(f', v') + \frac{\varepsilon}{2}(v', f') + \\ & + [(B^{-1}v', v') + \frac{\varepsilon}{2}(v', v')] \geq 0. \end{aligned}$$

Достаточным условием положительности этого выражения является выполнение неравенства

$$\frac{\varepsilon^2}{4} |(f', v')|^2 \leq [(S_\mu f', f') + \frac{\varepsilon}{2}(f', f')] [(B^{-1}v', v') + \frac{\varepsilon}{2}(v', v')],$$

которое, согласно (11), будет выполнено, если выполнено условие

$$\frac{\varepsilon^2}{4} (R_{-\frac{\varepsilon}{2}} v', v') \leq (B^{-1} v', v') + \frac{\varepsilon}{2} (v', v'). \quad (31)$$

В свою очередь, выполнение неравенства (31) обеспечивается выполнением более сильного условия

$$\frac{\varepsilon^2}{4} \left(\gamma + \frac{\varepsilon}{2} \right)^{-1} (v', v') \leq (B^{-1} v', v') + \frac{\varepsilon}{2} (v', v'),$$

которое можно записать в следующем виде:

$$(B^{-1} v', v') \geq \frac{-\gamma \varepsilon}{2\gamma + \varepsilon} (v', v'). \quad (32)$$

Наконец, справедливость соотношения (32) следует из того, что, согласно выбору h ,

$$h \leq \frac{\gamma \varepsilon}{2\gamma + \varepsilon},$$

и потому

$$(B^{-1}v', v') = \int_{-h}^{\infty} td(F_t v', v') \geq -h(v', v') \geq -\frac{\gamma \varepsilon}{2\gamma + \varepsilon}(v', v').$$

Таким образом, соотношение (30) должно быть выполнено, что, однако, невозможно, так как $g' \in E[-\infty; -\varepsilon] \mathcal{H}$ и

$$(\tilde{S}g', g') \leq -\varepsilon(g', g').$$

Полученное противоречие доказывает справедливость первого утверждения теоремы.

Переходим к доказательству второй части теоремы. Пусть \tilde{S} имеет p отрицательных собственных значений. Точечный характер отрицательной части спектра оператора B^{-1} устанавливается первым утверждением. Если B^{-1} имеет больше, чем p , отрицательных собственных чисел, то при некотором $\varepsilon > 0$ существует элемент $\bar{v} \in F[\delta; -\varepsilon] V$, ортогональный к $E[\alpha; 0] \mathcal{H}$. Так как $\bar{v} \in D(B^{-1})$, то, применяя (29), найдем, что

$$\int_{\delta}^{-\varepsilon} td(F_t \bar{v}, \bar{v}) \geq 0.$$

Последнее, однако, невозможно. Таким образом, число q отрицательных собственных значений оператора B^{-1} не превосходит p . С другой стороны, если q конечно, то $p \leq q$. Действительно, в противном случае при некотором $\varepsilon > 0$ размерность подпространства $E[\alpha; -\varepsilon] \mathcal{H}$ больше, чем q , и, следовательно, размерность V_ε также больше, чем q . Поэтому V_ε содержит элемент v' , ортогональный к подпространству $F[\delta; 0] V$. Но тогда для соответствующего элемента g' получим неравенство

$$(\tilde{S}g', g') = (S_\mu f', f') + (B^{-1}v', v') \geq (B^{-1}v', v') \geq \int_{\delta}^0 td(F_t v', v') = 0.$$

которое невозможно, так как $g' \in E[\alpha; -\varepsilon] \mathcal{H}$. Сопоставляя эти результаты, видим, что $p = q$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Отметим, что в условиях теоремы последовательные отрицательные собственные числа операторов \tilde{S} и B^{-1} удовлетворяют соотношениям

$$\lambda_j(\tilde{S}) \leq \lambda_j(B^{-1}) \quad (j = 1, 2, \dots).$$

Действительно, поскольку точечный характер отрицательной части спектра установлен, числа $\lambda_j(\tilde{S})$ можно отыскивать как последовательные минимумы квадратичной формы

$$\tilde{S}[g, g] \quad (\|g\| = 1)$$

на множестве $D[\tilde{S}]$. Согласно следствию 2 из теоремы 3, на множестве $D[B^{-1}]$ эта форма совпадает с квадратичной формой

$$B^{-1}[v, v] \quad (\|v\| = 1),$$

последовательные минимумы которой даются числами $\lambda_j(B^{-1})$. Теперь остается сослаться на известное мини-максимальное свойство собственных чисел.

§ 4. О симметричных положительно определенных расширениях оператора S

Ниже приводятся теоремы, являющиеся некоторым дополнением к теореме 1. Теорема 5 дает характеристику симметричных положительно определенных расширений S' исходного оператора S . Теорема 6 дает общую характеристику самосопряженных расширений оператора S' . Теорема 7 посвящена характеристике жесткого расширения S'_μ оператора S' .

Теорема 5. Для того чтобы оператор S' был замкнутым симметричным положительно определенным расширением оператора S , необходимо и достаточно, чтобы S' задавался как часть S^ на прямой сумме*

$$D(S') = D(S) \dot{+} (S_\mu^{-1} + B') U'; \quad (33)$$

здесь U' — некоторое подпространство U , B' — симметричный оператор, переводящий U' в U и удовлетворяющий условию

$$(B'u', B'u') \leq M(B'u', u'), \quad M > 0, \quad u' \in U'. \quad (34)$$

Доказательство. Необходимость. Введем обозначения:

$$\bar{U} = \mathcal{H} \ominus R(S') \text{ и } U' = U \ominus \bar{U}.$$

Очевидно, $R(S') = R(S) \oplus U'$. Рассмотрим жесткое расширение S'_μ оператора S' . Согласно теореме 1, существует ограниченный самосопряженный в U оператор B такой, что

$$D(S'_\mu) = D(S) \dot{+} (S_\mu^{-1} + B) U. \quad (35)$$

Очевидно, $R(S'_\mu) = \mathcal{H}$. Обозначим через B' часть оператора B , определенную на U' , и проверим, что

$$D(S') = D(S) \dot{+} (S_\mu^{-1} + B') U'.$$

Действительно, если $g = f_0 + (S_\mu^{-1} + B')u'$, $f_0 \in D(S)$, $u' \in U'$, то $S'_\mu g = Sf_0 + u' \in R(S')$, а потому $g \in D(S')$. Обратно, если $g \in D(S')$, то, согласно (35), $g = f_0 + (S_\mu^{-1} + B)u$, $f_0 \in D(S)$, $u \in U$, $S'_\mu g = S'_\mu f_0 + u$ и необходимо $u \in U'$, так как иначе $S'_\mu g \notin R(S')$. Остается убедиться в том, что выполнено условие (34). Пусть F_t — спектральная функция оператора B , M — его верхняя граница и $u \in U$. Так как оператор B — положительный, то

$$(Bu, Bu) = \int_0^M t^2 d(F_t u, u) \leq M \int_0^M t d(F_t u, u) = M(Bu, u).$$

Эти неравенства справедливы, в частности, на U' . Необходимость доказана.

Достаточность. Отметим предварительно, что оператор B' , заданный на U' , может быть расширен до самосопряженного в U оператора,

также удовлетворяющего условию (34)*. Действительно, рассмотрим симметричный оператор $C' = B' - \frac{M}{2}E$ на U' :

$$(C'u', C'u') = (B'u', B'u') - M(B'u', u') + \frac{M^2}{4}(u', u') \leq \frac{M^2}{4}(u', u').$$

Согласно теореме 2 работы М. Г. Крейна [2], существует по крайней мере одно самосопряженное расширение \tilde{C} оператора C' на все U , удовлетворяющее условию $\|\tilde{C}u\| \leq \frac{M}{2}\|u\|$, $u \in U$. Оператор $\tilde{B} = \tilde{C} + \frac{M}{2}E$, очевидно, является самосопряженным расширением оператора C' , и, кроме того,

$$\begin{aligned} (\tilde{B}u, \tilde{B}u) &= (\tilde{C}u, \tilde{C}u) + M(\tilde{C}u, u) + \frac{M^2}{4}(u, u) \leq \\ &\leq \frac{M^2}{2}(u, u) + M(\tilde{C}u, u) = M(\tilde{B}u, u). \end{aligned}$$

При помощи оператора \tilde{B} построим положительно определенный оператор \tilde{S} с областью определения

$$D(\tilde{S}) = D(S) \dot{+} (S_\mu^{-1} + \tilde{B})U.$$

Оператор S' , если его задать на прямой сумме (33), очевидно, является частью оператора \tilde{S} , а потому также должен быть положительно определенным. Замкнутость S' следует из существования ограниченного обратного оператора $(S')^{-1}$ на замкнутом множестве $R(S') = R(S) \oplus U'$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и я.

1. Если B' — положительный ограниченный самосопряженный оператор в U' , то, очевидно, условие (34) выполнено.
2. Оператор B' определяется формулой

$$B'u = (S')^{-1}u - S_\mu^{-1}u, \quad u \in U'. \tag{36}$$

Действительно, согласно (9), $B = (S'_\mu)^{-1} - S_\mu^{-1}$, а эта формула на U' совпадает с (36).

Рассмотрим теперь вопрос о самосопряженных расширениях оператора S' . Пусть U_0 — подпространство в \bar{U} и $U_1 = U' \oplus (\bar{U} \ominus U_0)$. Обозначим $\mathcal{H} \ominus U_0$ через \mathcal{H}_+ : $\mathcal{H}_+ = \mathcal{H} \ominus U_0$, и через P_+ — оператор проектирования в \mathcal{H}_+ .

Теорема 6. Для того чтобы оператор \tilde{S} был самосопряженным расширением оператора S' , необходимо и достаточно, чтобы \tilde{S} задавался как часть S^ на прямой сумме*

$$D(\tilde{S}) = D(S) \dot{+} (S_\mu^{-1} + \tilde{B})\tilde{U}_1 \dot{+} U_0; \tag{37}$$

* Для самосопряженного оператора выполнение условия (34) следует, как мы видели, из его положительности и ограниченности. С другой стороны, всякий симметричный оператор, удовлетворяющий (34), является положительным и ограниченным. Действительно,

$$\begin{aligned} (B'u', u') &\geq M^{-1}\|B'u'\|^2 \geq 0, \quad \|B'u'\|^2 \leq M\|B'u'\| \cdot \|u'\|, \\ \|B'u'\| &\leq M\|u'\| \quad \text{и} \quad \|B'\| \leq M. \end{aligned}$$

здесь $\tilde{U}_1 = D(\tilde{B})$ — плотное в U_1 множество, \tilde{B} — самосопряженное расширение симметричного в U' оператора P_+B' на U_1 .

Доказательство. *Необходимость.* Если оператор \tilde{S} является самосопряженным расширением S' , то, очевидно, $\tilde{S} \supset S$, $\tilde{S} \subset S^*$ и, согласно теореме 1,

$$D(\tilde{S}) = D(S) \dot{+} (S_\mu^{-1} + B) \tilde{U}_1 \dot{+} U_0.$$

Смысл обозначений здесь тот же, что в теореме 1. Соответствующие подпространства U_0 и U_1 удовлетворяют условиям доказываемой теоремы. Действительно,

$$U_0 = \mathcal{H} \ominus \overline{R(\tilde{S})} \subset \mathcal{H} \ominus R(S') = \bar{U}$$

и

$$U_1 = U \ominus U_0 = (U' \oplus \bar{U}) \ominus U_0 = U' \oplus (\bar{U} \ominus U_0).$$

Остается показать, что оператор B является расширением оператора P_+B' . С этой целью заметим, что на U' операторы \tilde{S}^{-1} и $P_+(S')^{-1}$ совпадают и, согласно (9) и (36),

$$B = \tilde{S}^{-1} - P_+S_\mu^{-1}P_+ = P_+(S')^{-1} - P_+\tilde{S}_\mu^{-1} = P_+[(S')^{-1} - S_\mu^{-1}] = P_+B'.$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть U_0 — некоторое подпространство в \bar{U} и \tilde{B} — самосопряженное расширение оператора P_+B' на U_1 . Тогда формулой (37) определяется некоторый оператор \tilde{S} , являющийся самосопряженным расширением оператора S . Покажем, что $\tilde{S} \supset S'$. Пусть $g' \in D(S')$. Согласно теореме 5, $g' = f_0 + S_\mu^{-1}u' + B'u'$, $f_0 \in D(S)$, $u' \in U'$. Обозначим $B'u' - P_+B'u'$ через u_0 . Очевидно, $u_0 \in U_0$. Теперь представим g' в виде

$$g' = f_0 + S_\mu^{-1}u' + P_+B'u' + u_0 = f_0 + (S_\mu^{-1} + \tilde{B})u' + u_0.$$

Так как $u' \in U' \subset U_1$, $u' \in D(\tilde{B})$ и $u_0 \in U_0$, то, согласно (37), $g' \in D(\tilde{S})$. Таким образом, $\tilde{S} \supset S'$, и теорема доказана.

Перейдем к характеристике жесткого расширения S'_μ оператора S' . Согласно теореме 6, область определения $D(S'_\mu)$ разлагается в прямую сумму:

$$D(S'_\mu) = D(S) \dot{+} (S_\mu^{-1} + \tilde{B})U,$$

где \tilde{B} — некоторое положительное ограниченное самосопряженное расширение оператора B' . Легко видеть, что множество положительных ограниченных самосопряженных расширений \tilde{B} оператора B' на U определяется формулой

$$\tilde{B} = \bar{B} - G;$$

здесь \bar{B} — одно из таких расширений (фиксированное), а G — произвольный самосопряженный в U оператор, удовлетворяющий условиям $(Gu, u) \leq (\bar{B}u, u)$ и $GU' = 0$. Последнее из этих условий, очевидно, эквивалентно тому, что $R(G) \subset \bar{U}$. Теорема 1 работы М. Г. Крейна [2] позволяет утверждать, что среди операторов G с указанными свойствами найдется максимальный оператор G_μ . Мы получим наименьшее (нижнее) положительное ограниченное расширение оператора B' , если в качестве G выберем оператор G_μ . Обозначим это расширение через B_μ . Из теоремы 5

работы [2] следует, что B_μ является единственным расширением \tilde{B} , для которого U' плотно в U по норме

$$\|u\|_{\tilde{B}}^2 = (\tilde{B}u, u).$$

После этих замечаний нетрудно доказать следующую теорему:

Теорема 7. *Область определения жесткого расширения S'_μ оператора S' представляется прямой суммой*

$$D(S'_\mu) = D(S) \dot{+} (S_\mu^{-1} \dot{+} B_\mu) U,$$

где B_μ — нижнее положительное расширение оператора B' на U .

Доказательство. Временно обозначим построенное по B_μ расширение оператора S' через \bar{S} и покажем, что $D(\bar{S}) \subset D[S']$. Как было отмечено в § 1, этим и будет доказано, что $\bar{S} = S'_\mu$. Так как

$$D(\bar{S}) = D(S) \dot{+} (S_\mu^{-1} \dot{+} B_\mu) U$$

и

$$D(S) \dot{+} S_\mu^{-1} U \subset D(S_\mu) \subset D[S] \subset D[S'],$$

то достаточно показать, что

$$B_\mu U = D(B_\mu^{-1}) \subset D[S']. \tag{38}$$

Так как расширение \bar{S} — положительно определенное, то, вводя норму в $D[\bar{S}]$, мы можем положить

$$\|g\|_{\bar{S}}^2 = \bar{S}[g, g]. \tag{39}$$

Множество $D[S']$ представляет собой некоторое подпространство в $D[\bar{S}]$. Поэтому для доказательства (38) достаточно показать, что каждый элемент из $B_\mu U$ может быть аппроксимирован в норме (39) элементами из $D[S']$. Пусть $v = B_\mu u$, $u \in U$. Согласно свойству нижнего расширения, найдется последовательность $\{u'_n\} \subset U'$ такая, что $\|u'_n - u\|_{B_\mu}^2 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Но последнее означает, что для v построена сходящаяся в \bar{S} -норме последовательность элементов $v'_n = B_\mu u'_n$, принадлежащих множеству $D[\bar{S}]$.

Действительно, согласно (10),

$$\begin{aligned} \|u'_n - u\|_{B_\mu}^2 &= (B_\mu u - B_\mu u'_n, u - u'_n) = (B_\mu^{-1} v - B_\mu^{-1} v'_n, v - v'_n) = \\ &= \bar{S}[v - v'_n, v - v'_n] \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

и остается показать, что $v'_n \in D[S']$. Обозначим временно через \bar{B} оператор, соответствующий жесткому расширению S'_μ . Так как $v'_n = B_\mu u'_n = B' u'_n = \bar{B} u'_n$, то $v'_n \in D(\bar{B}^{-1})$ и, согласно лемме 1, $v'_n \in D[S'_\mu] = D[S']$. Теорема доказана.

Замечание. Если оператор B' — самосопряженный в U' , то мы, очевидно, получим его нижнее расширение, если распространим его нулем на \bar{U} . Согласно доказанной теореме, полученное расширение оператора B' позволяет построить жесткое расширение S'_μ оператора S' .

Литература

1. K. Friedrichs, Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren und Anwendung auf die Spektralzerlegung von Differentialoperatoren, Math. Ann., **109** (1934), 465—487.
2. М. Г. Крейн, Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения. I. Матем. сб., **20 (62)** (1947), 431—495.
3. М. И. Вишик, Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений, Труды Моск. матем. об-ва, т. I (1952), 187—246.
4. М. Ш. Бирман, К теории общих граничных задач для эллиптических дифференциальных уравнений, ДАН СССР, т. **92**, № 2 (1953), 205—208.
5. М. Ш. Бирман, О минимальных функционалах для эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка, ДАН СССР, т. **93**, № 6 (1953), 953—956.
6. М. Ш. Бирман, О спектре сингулярных граничных задач для эллиптических дифференциальных уравнений, ДАН СССР, т. **97**, № 1 (1954), 5—7.
7. М. Ш. Бирман, К теории самосопряженных расширений положительно определенных операторов, ДАН СССР, т. **91**, № 2 (1953), 189—191.